Числа Фибоначчи в алгебре

Последовательность *чисел Фибоначчи* определяется начальным условием $F_0 = 0, F_1 = 1$ и рекуррентной формулой

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

1. Для натуральных чисел n докажите тождества

(а) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$;

(б) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

(в) $F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$;

(г) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;

(д) $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

2. Докажите, что сумма **(а)** пяти; **(б)** ста последовательных чисел Фибоначчи не является числом Фибоначчи.

3. **(а)** Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи.

(б) **Фибоначчиева система счисления.** Докажите, что любое натуральное число можно **единственным** образом представить в виде суммы нескольких различных чисел Фибоначчи, среди которых нет соседних.

4. **(а)** Докажите, что любые два соседних числа Фибоначчи взаимно просты.

(б) Докажите, что для любых натуральных m, n выполнено

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}.$$

(в) Докажите, что для любых натуральных n и m справедливо равенство

$$\text{НОД}(F_n, F_m) = F_{\text{НОД}(n,m)}.$$

(г) Дано натуральное число n. Пусть m — наименьшее натуральное число, для которого число F_m делится на n. Докажите, что число F_k делится на n тогда и только тогда, когда k делится на m.

5. Рассмотрим последовательность остатков от деления чисел Фибоначчи на натуральное число $n > 2$. Докажите, что длина периода этой последовательности чётна.

6. Дано натуральное число n. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \ldots + \frac{F_n}{F_{n-1} \cdot F_{n+1}}.$$

7. Докажите, что уравнение $a^2 + b^2 + 1 = 3ab$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.