

## Тождественные преобразования

1. Ненулевые числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию  $a + b = a^2 + b^2$ . Найдите значение выражения  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b - 1)$ .
2. Найдите значение выражения  $\frac{abcd}{ab+cd} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$  при условии, что  $a + b = c + d = 5$ .
3. Числа  $a, b, c$  таковы, что  $ab + a + b = 2$  и  $ac + a + c = 8$ . Найдите  $\frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{b+1}$ .
4. Сумма четырёх целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырёх произведений, умноженная на  $-1$ , равна удвоенному квадрату целого числа.
5. Докажите, что если  $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ , то среди чисел  $a, b, c$  есть пара противоположных (в сумме дающих 0).
6. Положительные числа  $a, b, c, d$  в произведении дают 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} = 1.$$

7. Среднее арифметическое двух положительных чисел  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) в  $m$  раз больше их среднего геометрического ( $\sqrt{ab}$ ). Найдите  $\frac{a}{b}$ .
8. Докажите, что для любых целых  $x, y, z$  выражение

$$2(|(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y)| + |x-y||y-z| + |y-z||z-x| + |z-x||x-y|)$$

равно квадрату целого числа.