

Тождественные преобразования

1. Ненулевые числа a и b удовлетворяют условию $a + b = a^2 + b^2$. Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b - 1)$.
2. Найдите значение выражения $\frac{abcd}{ab+cd} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ при условии, что $a + b = c + d = 5$.
3. Числа a, b, c таковы, что $ab + a + b = 2$ и $ac + a + c = 8$. Найдите $\frac{b+1}{c+1} + \frac{c+1}{b+1}$.
4. Сумма четырёх целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырёх произведений, умноженная на -1 , равна удвоенному квадрату целого числа.
5. Докажите, что если $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, то среди чисел a, b, c есть пара противоположных (в сумме дающих 0).
6. Положительные числа a, b, c, d в произведении дают 1. Докажите, что

$$\frac{1}{1+a+ab+abc} + \frac{1}{1+b+bc+bcd} + \frac{1}{1+c+cd+cda} + \frac{1}{1+d+da+dab} = 1.$$

7. Среднее арифметическое двух положительных чисел a и b ($a > b$) в m раз больше их среднего геометрического (\sqrt{ab}). Найдите $\frac{a}{b}$.
8. Докажите, что для любых целых x, y, z выражение

$$2(|(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y)| + |x-y||y-z| + |y-z||z-x| + |z-x||x-y|)$$

равно квадрату целого числа.