Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. Петя с Васей стоят у доски. Петя по очереди называет Васе все натуральные числа в порядке возрастания, начиная с 2. Вася, услышав очередное число, раскладывает это число на простые множители и записывает на доску количество этих множителей (например, услышав число $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, Вася запишет число 3). В какой-то момент Вася впервые записал на доску число, большее 2023. Верно ли, что следующее записанное число также будет больше 2023?

Решение. Заметим, что Вася в первый раз напишет число 2024, когда Петя назовёт число 2^{2024}. А во второй раз Вася напишет число 2024, когда Петя назовёт число $3 \cdot 2^{2023}$. Но эти два числа отличаются больше, чем на 1. □

Задача 2. В зоопарке жили 2024 гнома, каждый их которых сделал по одному высказыванию. Первый сказал: «На улице солнце». Начиная со второго, все высказывания были «Среди предыдущих высказываний более 25% неверны». Сколько ложных высказываний могли сделали гномы?

Ответ: 506

Решение. Заметим, что если первое утверждение было истинным, то второе будет ложным, и наоборот, если первое утверждение было ложным, то второе будет истинным. Поскольку истинность следующего утверждения зависит лишь от количества ложных утверждений среди предыдущих, то истинность всех оставшихся заявлений не зависит от того, каким было первое утверждение.

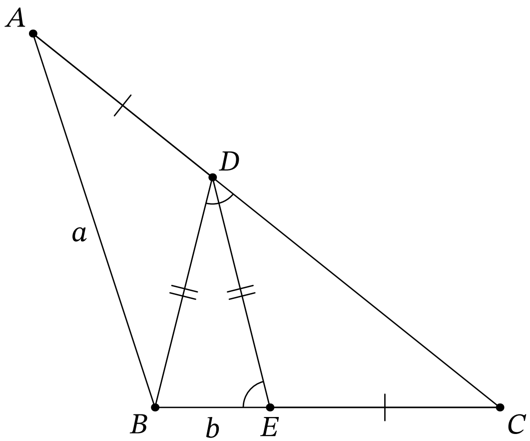
Заметим, что среди первых 4 утверждений ровно 1 ложное, поэтому 5-е утверждение будет ложным. Истинность следующих утверждений не изменится, если мы будем считать процент ложных утверждений, начиная с 5-го. Действительно, если среди какого-то набора утверждений ложных более 25%, то после добавления ещё семи ложных утверждений и трёх истинных общее количество ложных останется больше 25%. Аналогично для наборов, где ложных утверждений менее 25% и ровно 25%.

Таким образом, следующие 4 утверждения полностью повторят первые 4, то есть среди первых 8 утверждений ровно 2 ложных. В конце концов мы получим 506 ложных утверждений из 2024.

□

Задача 3. На сторонах AC и BC треугольника ABC выбраны такие точки D и E, что $AD = CE$. Оказалось, что $BD = DE$ и $\angle BDC = \angle BED$. Найдите длину отрезка AC, если $AB = a$ и $BE = b$.

Ответ: $2a - b$



Решение. Заметим, что $\triangle ADB = \triangle CED$ по первому признаку, поскольку $AD = CE$, $BD = DE$ и $\angle ADB = \angle DEC$. Поэтому $AB = CD$ и $\angle BAC = \angle BCA$. Из последнего следует, что треугольник ABC равнобедренный, и $EC = BC - BE - AB - BD = a - b$. И наконец. $AC = AD + DC = CE + AB = 2a - b$. □

Задача 4. Расстановку фишек в клетках шахматной доски 8×8 назовём *свободной*, если для каждой фишки найдётся свободная клетка, симметричная этой фишке относительно какой-то другой стоящей на доске фишки. Найдите наибольшее возможное количество фишек в свободной расстановке.

Ответ: 60.

Решение. Занумеруем все вертикали доски слева направо, а горизонтали — снизу вверх. Рассмотрим фишки, заполняющие любой квадрат размером 2×2. Клетки такого квадрата реализуют все возможные сочетания чётностей номеров вертикалей и горизонталей (ЧЧ, ЧН, НЧ, НН). При любом ходе фишки чётность номеров вертикали и горизонтали не изменяется. Поэтому для каждой из рассматриваемых фишек должна существовать «своя» свободная клетка. Следовательно, количество свободных клеток не может быть меньше четырёх.

Такая расстановка существует: четыре угловые клетки свободны, а на остальных стоят фишки. □

Задача 5. Существуют ли 2024 таких рациональных числа, что произведение любых 99 из них является целым числом, а произведение любых 100 из них — нет?

Ответ: нет, не существуют.

Решение. Выберем любые 100 из данных чисел и обозначим их через $a_1, \ldots, a_{100}$, а их произведение — через A. Тогда по условию число $B = \frac{A}{a_1} \cdot \frac{A}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{A}{a_{100}}$ является произведением ста целых чисел, то есть само является целым. С другой стороны, заметим, что $B = A^{99}$. Поскольку выбранные числа являются рациональными, то и A рационально. Представим A в виде несократимой дроби $A = \frac{x}{y}$ (то есть НОД$(x, y) = 1$) и предположим, что $y \neq 1$. Тогда $B = \frac{x^{99}}{y^{99}}$ так же не является целым, поскольку НОД$(x^{99}, y^{99}) = \pm 1$ и $y^{99} \neq \pm 1$ — противоречие. Значит, A — целое число. В силу произвольности выбора $a_1, \ldots, a_{100}$ получаем, что произведение любых 100 из данных чисел является целым числом. □

Задача 6. Дан алфавит из n букв. Последовательность букв называется *словом*, если между двумя одинаковыми буквами нет двух одинаковых букв.

(а) (2 балла) Найдите максимальную длину слова.

(б) (5 баллов) Найдите количество слов максимальной длины.

Ответ: **а)** $3n$; **б)** $n! \cdot 2^{n-1}$.

Решение. **а)** Заметим, что, что не может быть четырех одинаковых букв (в $a \ldots a \ldots a \ldots a$ внешние a содержат внутренние a), поэтому максимальная длина не превышает $3n$. Слово $111222 \ldots nnn$ подходит под условие задачи, поэтому максимальная длина равна $3n$.

б) Мы можем упорядочить буквы по порядку появления в слове: например, в *ccbcbabaa* первая встречающаяся буква — c, вторая — b и третья — a. Учитывая слово, мы можем переставлять виды букв любым способом (т.е. (c, b, a) на (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a) или (c, a, b)), поэтому результат будет кратен $n!$.

Теперь предположим, что буквы упорядочены, поэтому первая буква — это 1, вторая — 2 и так далее (при этом теряется множитель $n!$). Покажем, что слово начинается с 11. Действительно, оно начинается с 1 по предположению. Если между первой 1 и следующей 1 есть какая-то буква a, то два других a должны стоять после второй 1. Если они также находятся после третьего 1, то существует пара букв a, которая содержит пару 1, а если одна из них находится перед третьим 1, то между первой и последней 1 есть две буквы a. Таким образом, между первыми двумя 1 нет a, и слово начинается с 11.

Докажем, что с фиксированным порядком букв будет ровно 2^{n-1} слов максимальной длины. Докажем это по индукции. Для $n = 1$ действительно есть только одно слово — 111. Предположим, что утверждение верно для $n - 1$. Из произвольного слова длины $3n$ удалим три буквы 1. Тогда результирующая последовательность представляет собой слово длины $3n - 3$, поэтому оно должно начинаться с 22. Отсюда следует, что исходное слово начиналось с 11122 или 11212 (третья 1 не может стоять после двух или более 2). Поэтому слов длины $3n$ с фиксированным порядком букв будет $2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

Таким образом, общее количество слов равно $n! \cdot 2^{n-1}$. □