

Основная теорема арифметики

1. Докажите иррациональность числа (а) $\sqrt{2}$; (б) $\sqrt[3]{\frac{16}{33}}$.
2. Даны натуральные числа a и b , причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10} , то a^2 делится на b .
3. Найдите все такие натуральные n , для которых число $n^2 - 1$ является степенью простого числа.
4. Решите в целых числах уравнение $x + x^3 = 5y^2$.
5. В клетки таблицы размером 9×9 расставили все натуральные числа от 1 до 81. Вычислили произведения чисел в каждой строке таблицы и получили набор из девяти чисел. Затем вычислили произведения чисел в каждом столбце таблицы и также получили набор из девяти чисел. Могли ли полученные наборы оказаться одинаковыми?
6. Пусть a, b, c — натуральные числа, причём $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ и $\frac{ab}{a-b} = c$. Докажите, что число $a - b$ является точным квадратом.
7. Натуральные числа x, y таковы, что оба числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся на $x^2 + y^2$.
 - (а) Докажите, что числа x и y взаимно просты.
 - (б) Найдите все такие числа x и y .
8. Найдите все натуральные числа x и y , для которых $x^y = y^x$.
9. Найдите 2023 различных натуральных числа таких, что сумма никаких нескольких из них не была бы степенью натурального числа.