Метод математической индукции

1. Докажите тождества

(а) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(б) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Найдите значения выражений

(а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$;

(б) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n!$.

3. Докажите неравенство

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}}} < 3.$$

4. Докажите неравенства

(а) $2^n > n$ при всех натуральных n;

(б) $2^n > n^2$ при натуральных $n > 4$;

(в) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} < 1$ при всех натуральных n.

5. Ненулевое вещественное число x таково, что число $x + \frac{1}{x}$ является целым. Докажите, что число $x^n + \frac{1}{x^n}$ также является целым для любого натурального n.

6. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в десятичной записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

7. Докажите, что число $11\ldots1$ (3^n единиц) делится на 3^n.

8. Изначально на доске записаны несколько (больше одного натуральных чисел). Затем каждую минуту на доску записывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел. Докажите, что сотое записанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

9. Назовём множество (различных) натуральных чисел *привлекательным*, если любое число из этого множества является делителем суммы всех остальных чисел. Существует ли привлекательное множество, состоящее из миллиона чисел?