

Принцип Дирихле в теории чисел

1. На доске написано 10 натуральных чисел. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько и расставить между ними знаки плюс и минус так, чтобы полученная алгебраическая сумма делилась на 1001.
2. Дана бесконечная вправо последовательность цифр и нечетное число l , не делящееся на 5. Докажите, что можно выбрать несколько цифр подряд, образующих число, делящееся на l .
3. (а) Докажите, что среди 100 натуральных чисел можно выбрать несколько, чтобы их сумма делилась на 100.
(б) Сумма ста натуральных чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была равна 100.
4. Дана строчка из 25 цифр. Всегда ли можно расставить в этой строчке знаки арифметических операций $+$, $-$, \times , $:$ и скобки так, чтобы образовалось числовое выражение, равное 0. Последовательно стоящие цифры можно объединять в числа, но порядок цифр изменять нельзя.
5. Из чисел от 1 до $2n$ выбрано $n + 1$ число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, одно из которых делится на другое.
6. Докажите, что найдется число, представимое в виде суммы четырех квадратов целых чисел более, чем миллионом способов.
7. Есть ли 2023-значное число, перестановкой цифр которого можно получить 2023 разных 2023-значных полных квадратов?