Числа сочетаний

Числом сочетаний из n элементов по k называется количество способов выбрать k предметов из n различных предметов, и обозначается C_n^k. Иногда используется обозначение $\binom{n}{k}$.

1. **(а)** Что означают и чему равны C_n^0 и C_n^n? **(б)** Докажите, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

2. Докажите двумя способами, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

3. **(Бином Ньютона)** Докажите, что для действительных чисел a и b и натурального n выполнено равенство

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

4. Докажите двумя способами, что $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

5. Докажите двумя способами, что

(а) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$, **(б)** $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

6. Докажите двумя способами, что при $0 < m < k < n$

$$C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}.$$

7. Докажите хотя бы одним способом, что

$$\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n.$$

8. Докажите хотя бы одним способом, что

$$C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} \ldots + C_n^k C_m^0 = C_{m+n}^k.$$

9. Докажите двумя способами, что

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

10. Докажите двумя способами, что

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}.$$

11. Найдите сумму

$$1 \cdot \left(C_n^1\right)^2 + 2 \cdot \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + n \cdot \left(C_n^n\right)^2.$$