

Дискретная непрерывность

1. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары – чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.
2. На доске написано натуральное число. Каждую минуту к числу прибавляется любая из его ненулевых цифр. Докажите, что в некоторый момент на доске будет написано четное число.
3. Существуют ли тысяча последовательных натуральных чисел, среди которых ровно восемь простых?
4. За круглым столом сидит четное количество чебурашек. У каждого из них есть несколько шариков, причем у любых двух рядом сидящих чебурашек количество шариков отличается не больше, чем на 1. Докажите, что найдется пара чебурашек, сидящих напротив друг друга, у которых количество шариков отличается не больше, чем на 1.
5. В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.
6. На клетчатой доске 100×100 стоит 1000 шашек. Докажите, доску можно разрезать по границам клеток на две равные части с равным количеством шашек.
7. В некоторых клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что сумма всех чисел в таблице по абсолютной величине не превосходит 27. Докажите, что в некотором квадрате 5×5 сумма чисел по абсолютной величине не превосходит 5.
8. Вадим и Артемий играют в игру. Сначала Артемий загадывает натуральное число и пишет его на доску. За один ход Вадим может вписать несколько плюсов между цифрами числа и записать на доске сумму (например, из числа 123456789 можно получить $1234 + 56 + 789 = 2079$). Вадим побеждает, если ему удастся получить однозначное число за сто ходов. Сможет ли Артемий избежать поражения?