Соответствия

1. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число делителей.

2. Последовательность из пяти цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 будем называть «горой», если $a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5$, и «ямой», если $a_1 > a_2 > a_3 < a_4 < a_5$. Чего больше: «гор» или «ям»?

3. Среди автобусных билетов с номерами от 000000 до 999999 каких больше: счастливых (у которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр) или билетов с суммой цифр 27?

4. Докажите, что при любом натуральном n уравнения $x^2+y^2 = n$ и $x^2+y^2 = 2n$ имеют одинаковое количество решений в целых числах.

5. Петя подсчитал количество всевозможных n-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы A, B, C и D, причём в каждом слове букв A и B поровну. Вася подсчитал количество всевозможных $2n$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только буквы A и B, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

6. Докажите, что суммарное количество цифр в десятичной записи чисел $1, 2, 3, \ldots, 10^k$ равно суммарному количеству нулей в десятичной записи чисел $1, 2, 3, \ldots, 10^{k+1}$.

7. Докажите, что число способов разрезать доску $2\times(n+1)$ на доминошки равно числу последовательностей длины n из нулей и единиц, в которых нет двух нулей подряд.

8. Докажите, что число разбиений натурального n на нечётные натуральные слагаемые равно числу разбиений n на попарно различные натуральные слагаемые. (Разбиения, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

9. Дано натуральное число n. Что больше: число способов разрезать квадрат $3n \times 3n$ на клетчатые прямоугольники 1×3 или число способов разрезать клетчатый квадрат $2n \times 2n$ на доминошки 1×2?