

Остатки

1. Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7} .
2. Артемий попросил Вадима придумать число, десятичная запись которого состоит из 1000 единиц, (а) 1000 (б) 2000 двоек и нескольких нулей, а Лена попросила, чтобы это число вдобавок являлось полным квадратом. Сможет ли Вадим справиться с поставленной задачей?
3. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стёрли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2023. Какие числа остались на доске?
4. На доске написаны числа 2 и 3. Каждую минуту Вова перемножает все записанные на доске числа, прибавляет 1 и записывает на доску наибольший простой делитель получившегося числа. Появится ли когда-нибудь на доске число 5?
5. Можно ли целые числа от 1 до 200 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы сумма любых десяти подряд делилась на 10?
6. Камни лежат в трех кучках: в одной – 51 камень, в другой – 49 камней, а в третьей – 5 камней. Разрешается объединять любые кучки в одну, а также разделять кучку из четного количества камней на две равные. Можно ли получить 105 кучек по одному камню в каждой?
7. По кругу стоят несколько детей. Дед Мороз обходит круг по часовой стрелке и раздаёт конфеты.

(а) Пусть в кругу стоит a детей. Сначала Дед Мороз выдал первому ребёнку одну конфету, затем b детей пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем b детей пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем b детей пропустил и так далее. При каких a и b все дети получают конфеты?

(б) Пусть в кругу стоит p детей, где p — простое нечётное число. Вначале Дед Мороз выдал первому ребёнку одну конфету, затем 1 ребёнка пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 2 детей пропустил, следующему ребёнку выдал одну конфету, затем 3 детей пропустил и так далее. Сколько детей никогда не получат конфет?