Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. В ряд выписана строчка, состоящая из 101 нулей и единиц. Затем каждая некрайняя цифра заменяется на ту, которая хотя бы дважды встречается среди самой цифры и её двух соседей. Крайние цифры стираются. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — 1. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?

Задача 2. В каждой клетке доски 7×7 написано натуральное число. Сумма всех чисел равна 100. Оказалось, что есть 3 строки, сумма чисел в которых не менее 70, и 3 столбца, сумма чисел в которых не менее 70. Докажите, что какое-то из написанных чисел не менее 7.

Задача 3. На некотором острове люди носят модные магические колпаки чёрного и белого цветов. Если на жителе надет белый колпак, то он говорит только правду, а если надет чёрный колпак, то житель всегда врёт. Люди, на которых нет колпака, не носят их, потому что произносят только такие фразы, которые нельзя говорить, нося колпак.

Например, стоя рядом с человеком в чёрном колпаке, человек без колпака может сказать фразу «Мы оба в чёрных колпаках» (потому что если бы он был в белом колпаке, то такая фраза была бы ложной, а если бы он был в чёрном колпаке, она была бы истинной).

Однажды человек без колпака произнёс три фразы о жителях острова:
1. На острове живут ровно 25 людей в чёрных колпаках.
2. На острове живут ровно 26 людей в белых колпаках.
3. Людей без колпаков на острове не меньше, чем людей в белых колпаках.
Сколько всего человек живут на острове?

Задача 4. Иван, Фёдор и Михаил по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). После каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Иван участвовал в 13 партиях, а Фёдор — в 27. Сколько партий мог сыграть Михаил?

Задача 5. Назовем *бабочкой* фигуру, состоящую из двух клеток, соседних по углу. Какое наименьшее количество бабочек можно разместить на доске 10×10 таким образом, чтобы любая клетка этой доски либо принадлежала одной из бабочек, либо была соседней по стороне с клеткой одной из бабочек?

Задача 6. Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Можно ли такими операциями из любого натурального числа получить любое другое натуральное число?

(Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)