Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. В ряд выписана строчка, состоящая из 101 нулей и единиц. Затем каждая некрайняя цифра заменяется на ту, которая хотя бы дважды встречается среди самой цифры и её двух соседей. Крайние цифры стираются. С полученной строчкой из 99 цифр делается та же операция, и т.д., пока не получится одна цифра. Оказалось, что эта цифра — 1. При каком наименьшем количестве исходных единиц это могло получиться?

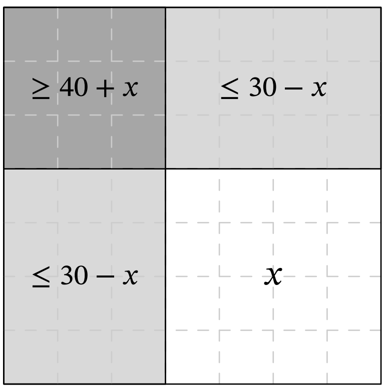
Ответ: 2

Решение. Если в строчке только одна единица, то она изчезнет на первом шаге.

Теперь рассмотрим строчку, в которой две единицы находятся на 50 и 51 местах. При таких операциях они будут на месте, до тех пор, пока не останется три символа. И на последнем шаге останется цифра 1. □

Задача 2. В каждой клетке доски 7×7 написано натуральное число. Сумма всех чисел равна 100. Оказалось, что есть 3 строки, сумма чисел в которых не менее 70, и 3 столбца, сумма чисел в которых не менее 70. Докажите, что какое-то из написанных чисел не менее 7.

Решение. Пусть без ограничения общности в первых трех строках и в первых трех столбцах сумма не менее 70. Тогда суммы чисел в последних четырёх столбцах и в последних четырёх строках не превосходят 30. Обозначим сумму чисел в правом нижнем квадрате 4×4 через x. Тогда сумма чисел в каждом из серых прямоугольников 3×4 не превосходят $30 - x$, а сумма чисел в тёмно-сером квадрате 3×3 хотя бы $40 + x$. Поскольку в каждой клетке доски написано натуральное число, то $x \geqslant 16$. Значит, сумма чисел в тёмно-сером квадрате 3×3 хотя бы $40 + 16 = 56$. Тогда по принципу Дирихле в нём найдётся число, не меньшее $\frac{56}{9} > 6$, что и требовалось доказать.



□

Задача 3. На некотором острове люди носят модные магические колпаки чёрного и белого цветов. Если на жителе надет белый колпак, то он говорит только правду, а если надет чёрный колпак, то житель всегда врёт. Люди, на которых нет колпака, не носят их, потому что произносят только такие фразы, которые нельзя говорить, нося колпак.

Например, стоя рядом с человеком в чёрном колпаке, человек без колпака может сказать фразу «Мы оба в чёрных колпаках» (потому что если бы он был в белом колпаке, то такая фраза была бы ложной, а если бы он был в чёрном колпаке, она была бы истинной).

Однажды человек без колпака произнёс три фразы о жителях острова:
1. На острове живут ровно 25 людей в чёрных колпаках.
2. На острове живут ровно 26 людей в белых колпаках.
3. Людей без колпаков на острове не меньше, чем людей в белых колпаках.
Сколько всего человек живут на острове?

Ответ: 77

Решение. Последовательно проанализируем каждое высказывание. Если бы человек, произнёсший данные фразы, носил чёрный колпак, то все эти высказывания были бы истинны. Значит, на острове ровно 24 человека в чёрных колпаках, ровно 26 человек в белых колпаках, и людей без колпаков строго больше чем людей в белых колпаках, то есть не меньше 27 (поскольку в таком случае число людей без колпаков было бы на 1 меньше реального). С другой стороны, если бы человек, произнёсший данные фразы, носил белый колпак, то на острове было бы 27 человек в белых колпаках, а последнее высказывание было бы ложно. Значит, число x человек без колпаков удовлетворяет неравенству $x - 1 < 27$. Учитывая, что $x \geqslant 27$, получаем, что $x = 27$. Значит, всего на острове живут $24 + 26 + 27 = 77$ человек. □

Задача 4. Иван, Фёдор и Михаил по очереди играли в шахматы друг с другом (двое играют, один смотрит). После каждой партии проигравший уступал место за доской зрителю (ничьих не было). В итоге оказалось, что Иван участвовал в 13 партиях, а Фёдор — в 27. Сколько партий мог сыграть Михаил?

Ответ: 14

Решение. Пусть всего сыграно n партий. Заметим, что из двух подряд идущих партий Иван участвовал как минимум в одной. Это значит, что он сыграл не меньше $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ всех партий (где $\lfloor x \rfloor$ обозначает округлённое вниз число x). Значит, $13 \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, откуда следует, что $27 \geqslant n$. Но Фёдор сыграл 27 партий, значит, всего было ровно 27 партий, а Иван и Михаил по очереди играли с Фёдором. То есть Михаил сыграл 14 партий. □

Задача 5. Назовем *бабочкой* фигуру, состоящую из двух клеток, соседних по углу. Какое наименьшее количество бабочек можно разместить на доске 10×10 таким образом, чтобы любая клетка этой доски либо принадлежала одной из бабочек, либо была соседней по стороне с клеткой одной из бабочек?

Ответ: 16

Решение. Рассмотрим 16 клеток, отмеченных на рисунке 1

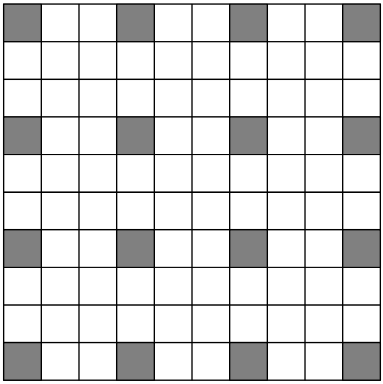


Рис. 1: к решению задачи 5

Заметим, что никакие две из них не могут быть соседними с одной и той же бабочкой. Значит, потребуется не меньше 16 бабочек.

Пример см. на рисунке 2.

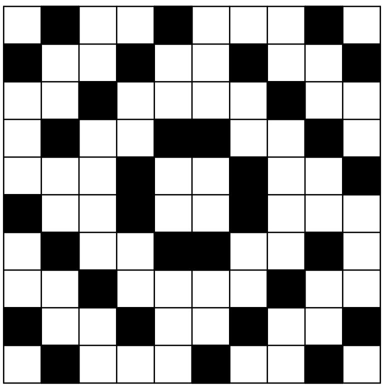


Рис. 2: к решению задачи 5

□

Задача 6. Одной операцией к числу можно либо прибавить 9, либо стереть в нем в любом месте цифру 1. Можно ли такими операциями из любого натурального числа получить любое другое натуральное число?

(Замечание: если стирается единица в самом начале числа, а за ней сразу идут нули, то эти нули тоже стираются.)

Ответ: Можно.

Решение. Заметим, что если в текущем натуральном числе n ровно k цифр, то прибавляя к нему $10^k - 1 = 9 \cdot \underbrace{11 \ldots 11}_{k}$ и стирая единицу в самом старшем разряде, получим число $k-1$.

Пусть теперь нужно получить число n из числа m. Если $m > n$, то будем последовательно вычитать из m единицу с помощью допустимых операций, как показано выше, пока не получим n, а если $m < n$, то прибавим к m такое число $9k$, что $m + 9k > n$, и сведём задачу к первому случаю. $\square$