Олимпиада 2

1. Назовём 70-значное число *уравновешенным*, если цифры $1, 2, 3, \ldots, 7$ встречаются в десятичной записи по 10 раз. Докажите, уравновешенное число не может делиться на другое уравновешенное число.

2. В квадрате $(4n+2)\times(4n+2)$ ползает черепаха, каждый раз переползая на соседнюю по стороне клетку. Черепаха начала в угловой клетке, и, побывав в каждой клетке по разу, вернулась обратно в клетку, в которой начала. Для какого наибольшего k можно утверждать, что в какую-то строку или столбец черепаха заходила (то есть до перемещения она была вне строки/столбца, а после — уже внутри) хотя бы k раз?

3. Плоскость α пересекает ребра AB, BC, CD и DA треугольной пирамиды $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Оказалось, что двугранные углы $\angle(KLA, KLM)$, $\angle(LMB, LMN)$, $\angle(MNC, MNK)$ и $\angle(NKD, NKL)$ равны. (Здесь через $\angle(PQR, PQS)$ обозначается двугранный угол при ребре PQ в тетраэдре $PQRS$.) Докажите, что проекции вершин A, B, C и D на плоскость α лежат на одной окружности.

4. Для действительных $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{12\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)^2}{n(n+1)(n+2)(3n+1)}.$$