Олимпиада 1

1. Петя выписал на доску n различных натуральных чисел. Затем в тетрадку он выписал все возможные суммы троек чисел на доске. Какое наибольшее количество различных степеней тройки могло оказаться в тетрадке?

2. Пусть ω — это описанная окружность треугольника ABC. Проведем линию, параллельную BC, которая пересекает AB, AC в точках E, F и ω в точках U, V. Пусть M — это середина BC, а ω' — это описанная окружность треугольника UMV. Пусть ME и ω' пересекаются в точке T, а FT пересекает ω' в точке S. Докажите, что если радиусы окружностей ω и ω' равны, то прямая EF касается описанной окружности треугольника MCS.

3. Пусть n — натуральное число и p — простое число вида $8k+5$. Многочлен Q степени не выше 2023 с неотрицательными целыми коэффициентами, называется *клёвым*, если все его коэффициенты не превосходят 2023 и число
$$Q(2)Q(3)\cdots Q(p-2)-1$$
делится на p. Докажите, что количество клёвых многочленов чётно.

4. Даны натуральные n, k. В стране n городов, и некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что если разделить города на две группы, то между группами будет не более kn дорог. Какое наибольшее количество городов, попарно не соединённых дорогами, можно гарантированно выбрать в этой стране?