Диагностическая работа. Очный этап.

Задача 1. Дана таблица $n \times n$. Сколькими способами Лена может записать в каждую из клеток целое число от 0 до 5 включительно так, чтобы в каждой строке сумма чисел делилась на 2, а в каждом столбце — на 3?

Ответ: 6^{n^2-n}

Решение. На секунду забудем о клетках на одной из главных диагоналей и произвольным образом расставим числа во всех остальных клетках. Заметим, что какие бы числа не были записаны, Лена может единственным расставить числа в клетке по диагонали так, чтобы выполнялось условие задачи. Действительно, на каждое число в клетке на диагонали накладывается два условия: делимость на 3 суммы чисел в его столбце и делимость на 2 суммы чисел в его строке. Первое условие однозначно определяет остаток искомого числа при делении на 3, а второе – на 2. По китайской теореме об остатках вместе эти два условия однозначно определяют остаток при делении на 6. Таким образом, числа вне диагонали можно расставить как угодно, а числа на диагонали восстанавливаются единственным образом. Поскольку клеток в таблице n^2, а на диагонали их n, то требуемое число способов равно 6^{n^2-n}. □

Задача 2. Для квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами выполнено неравенство $f(x) \geqslant -\frac{9}{10}$ для всех вещественных x. Докажите, что для всех вещественных x выполнено $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$.

Ответ: По условию трёхчлен $x^2+ax+b+\frac{9}{10}$ не имеет двух различных вещественных корней (иначе он бы принимал отрицательные значения), значит, его дискриминант неположителен. Таким образом, $a^2-4(b+\frac{9}{10}) = a^2-4b-\frac{36}{10} \leqslant 0$, что равносильно неравенству

$$a^2 - 4b \leqslant \frac{36}{10}.$$

Предположим теперь, что неравенство $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$ неверно для некоторого вещественного x. Значит, трёхчлен $x^2 + ax + b + \frac{1}{4}$ имеет два различных вещественных корня (ведь его старший коэффициент положителен), а потому его дискриминант положителен. Получаем неравенство $a^2 - 4b - 1 > 0$, которое равносильно неравенству

$$a^2 - 4b > 1.$$

Далее, поскольку число $a^2 - 4b$ является целым и удовлетворяет неравенствам

$$1 < a^2 - 4b \leqslant \frac{36}{10}$$

, оно может быть равно 2 или 3. Осталось заметить, что оба случая невозможны, так как число $a^2 - 4b$ может давать остатки только 0 или 1 при делении на 4. Значит, наше предположение было неверным, и неравенство $f(x) \geqslant -\frac{1}{4}$ выполнено для всех вещественных x.

Решение. □

Задача 3. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) отметили середины P и Q диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что если $\angle DAQ = \angle CAB$, то $\angle PBA = \angle DBC$.

Решение. Обозначим M середину стороны AB. Так как точки M, P, Q лежат на средней линии трапеции $ABCD$, имеем $MP||AD||BC$. Значит, $\angle MAP = \angle DAQ = \angle AQP$. Теперь поскольку углы $\angle MAP$ и AQP равны, описанная окружность треугольника APQ касается прямой AM в точке A. Таким образом, степень точки M относительно этой окружности равна MA^2, а с другой стороны она же равна и $MP \cdot MQ$, то есть $MA^2 = MP \cdot MQ$

Далее, поскольку $MA = MB$, то $MB^2 = MP \cdot MQ$, что в свою очередь означает, что описанная окружность треугольника BPQ касается отрезка BM в точке B. Таким образом, $\angle BQP = \angle PBM$. С другой стороны, $\angle BQP = \angle CBD$, и мы получаем требуемое равенство $\angle PBA = \angle DBC$. □

Задача 4. Вадим загадал строчку длины 200, состоящую из символов «0» и «1». По просьбе Артемия он выписал на доску все строки (из нулей и единиц) длины 200, отличающиеся от загаданной ровно в 100 позициях. Глядя на эти строки, Артемий хочет выписать несколько последовательностей длины 200 так, чтобы среди них заведомо оказалась загаданная Вадимом. Какое наименьшее количество последовательностей понадобится Артемию, чтобы справиться с этой задачей вне зависимости от того, какую строку загадал Вадим?

Ответ: 2

Решение. Будем называть две строчки, отличающиеся во всех двухстах символах, *инвертированными*. Заметим, что для двух инвертированных строчек Вадим выпишет на доску один и тот же набор строк (действительно, если некоторая строка отличается от загаданной в ровно ста символах, то от инвертированной она отличается в ста оставшихся символах). Значит, Артемию понадобится написать хотя бы две строки. Теперь убедимся, что двух строк ему будет достаточно. В самом деле, пусть нашлись две строки A и B, которые совпадают в n символах ($0 < n < 200$), а отличаются – в $200 - n$ символах. Покажем, что для этих двух строк Вадим выпишет на доску разные наборы. Инвертировав при необходимости одну из строк (мы уже знаем, что для таких строк Вадим выписывает один и тот же набор), мы можем считать, что $n \geqslant 100$.

Выберем теперь некоторые 100 позиций, в которых строки A и B совпадают, и рассмотрим строку C, совпадающую с A в этих ста позициях и отличающуюся в остальных. Ясно, что если бы Вадим загадал строчку A, то по просьбе Артемия он бы выписал на доску строчку C. С другой стороны, строчка C совпадает с B в более чем ста символах (в тех же, что A и хотя бы ещё одном, ведь A и B различны). Таким образом, наборы строк, которые Вадим выпишет для A и B будут различными, и значит, Артемию достаточно двух строчек. $\square$

Задача 5. В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности I. Прямые BI и CI повторно пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках M и N соответственно. Окружность с диаметром NI пересекает отрезок AB в точках P и Q, а окружность с диаметром MI пересекает отрезок AC в точках R и S. Докажите, что точки P, Q, R и S лежат на одной окружности.

Ответ:

Решение. Обозначим K середину дуги BC (не содержащей точку A) описанной окружности треугольника ABC. Пусть прямые AK и NM пересекаются в точке D. Заметим, что $\angle ADM = 90°$. В самом деле, угол между прямыми AK и NM равен полусумме дуг AM, NB и BK (не содержащих других отмеченных точек) описанной окружности треугольника ABC, а эта полусумма в свою очередь равна четверти от суммы дуг CA, AB и BC (поскольку точки K, N, M — их середины), то есть $90°$.

Теперь, поскольку $\angle NDI = 90°$, точка D лежит на окружности с диаметром NI. Аналогично, точка D лежит на окружности с диаметром MI.

Осталось заметить, что степень точки A относительно окружности с диаметром NI равна $AP \cdot AQ = AD \cdot AI$, а степень этой же точки относительно окружности с диаметром MI равна $AR \cdot AS = AD \cdot AI$. Таким образом, $AP \cdot AQ = AR \cdot AS$, и значит, точки P, Q, R, S лежат на одной окружности. $\square$

Задача 6. Докажите, что для различных натуральных чисел a, b, и c выполнено неравенство

$$\text{НОД}(ab+1, ac+1, bc+1) \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Решение. Не умаляя общности, упорядочим $a < b < c$. Обозначим $d = \text{НОД}(ab+1, ac+1, bc+1)$. Заметим, что число $(a+1)-(ab+1) = a(c-b)$ делится на d. В то же время $\text{НОД}(ac+1, a) = 1$, поэтому числа a и d взаимно просты. Значит, число $c-b$ делится на d. Аналогично число $b-a$ делится на d.

Обозначим $c - b = \ell d$, $b - a = kd$. Тогда $b = a + kd \geqslant a + d$ и $c = b + \ell d \geqslant b + d \geqslant a + 2d$. Таким образом, $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3a+3d}{3} = a + d \geqslant d$. $\square$