Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1.1. На какие цифры **не** может оканчиваться выражение $[x] + [9x] + 7$ при всех действительных $x > 0$? Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа x.

Ответ: 6.

Решение. Обозначив через $\{x\}$ дробную часть числа x, мы имеем $[x] + [9x] + 7 = [x] + 9\,[[x] + \{x\}] + 7 = 10[x] + [9\{x\}] + 7$. Так как $0 \leqslant \{x\} < 1$, то $0 \leqslant 9\{x\} < 9$, откуда $[9\{x\}]$ не может оканчиваться на 9, а исходное выражение — на 6.

Если же взять x вида $\frac{k}{9}$ для $0 \leqslant k < 9$, то выражение из условия будет равняться $[\frac{k}{9}] + [9\frac{k}{9}] + 7 = k + 7$, то есть оканчиваться на все цифры, кроме 6. □

Задача 1.2. На какие цифры **не** может оканчиваться выражение $[3x] + [7x] + 3$ при всех действительных $x > 0$? Здесь через $[x]$ обозначена целая часть числа x.

Ответ: 2.

Задача 2.1. На плоскости изображено несколько различных графиков вида

$$y = x^4 + x^2 + ax + b,$$

где a и b — целые числа, по модулю не превосходящие 100. Известно, что все они проходят через одну и ту же точку. Какое максимальное количество графиков могло быть изображено?

Ответ: 201.

Решение. *Пример.* Все графики вида $y = x^4 + x^2 + ax + a$ проходят через точку $(-1, 2)$. *Оценка.* При фиксированном a и разных значениях b все графики вида $y = x^4+x^2+ax+b$ попарно не пересекаются. А так как различных значений параметров a □

Задача 2.2. На плоскости изображено несколько различных графиков вида

$$y = x^4 - x^3 + ax + b,$$

где a и b — целые числа, по модулю не превосходящие 150. Известно, что все они проходят через одну и ту же точку. Какое максимальное количество графиков могло быть изображено?

Ответ: 301.

Задача 3. В треугольнике ABC угол A равен $20°$, а угол C равен $40°$. Проведены биссектриса AL и внешняя биссектриса CN (L лежит на стороне BC, а N — на продолжении стороны AB). Найдите $\angle CLN$. Ответ выразите целым числом градусов.

Ответ: 80.

Решение. По условию $\angle ABC = 120°$, $\angle BAL = \angle CAL = 10°$, $\angle BCN = 70°$. Тогда легко находим углы $\angle ALC = 130°$ и $\angle ANC = 50°$. Пусть прямые AL и CN пересекаются в точке S. Заметим, что для треугольника ABC точка S является пересечением биссектрисы внутреннего угла A и внешнего угла C, поэтому она является центром вневписанной окружности и лежит на биссектрисе угла $\angle CBN = 60°$. Заметим, что четырёхугольник $BLSN$ — вписанный, поскольку $\angle BLS + \angle BNS = 180°$. Отсюда следует, что $\angle SLN = \angle CBN = 30°$. Искомый угол $\angle CLN = \angle CLS + \angle SLN = 50° + 30° = 80°$. □

Задача 4.1. По кругу записаны 100 различных чисел, любые два соседних отличаются на 10 или на 7. Найдите наибольшее возможное значение разности между самым большим и самым маленьким числом.

Ответ: 497

Решение. *Оценка.* Если взять минимальное число среди написанных, то одно из соседних чисел будет больше его на 7, а другое — на 10. Поэтому среди разностей соседних чисел есть как 7, так и 10.

Посмотрим на расстояние (в промежутках) между самым большим и самым маленьким числом. Если оно не более 49, то между соседними числами разность не больше 10, и разность между нашими числами не более $10 \cdot 49 = 490$. Если же расстояние между ними равно 50, то они диаметрально противоположны. На какой-то из двух дуг есть разность, равная 7, остальные не более 10, и разность между самым большим и самым маленьким числами не более $49 \cdot 10 + 7 = 497$.

Пример: $0, 10, 20, \dots, 490, 497, 487, 477, \dots, 7$. □

Задача 4.2. По кругу записаны 100 различных чисел, любые два соседних отличаются на 11 или на 6. Найдите наибольшее возможное значение разности между самым большим и самым маленьким числом.

Ответ: 545.

Задача 5.1. Даны вещественные числа x, y, z. Найдите минимальное значение выражения

$$(7 + x - y)^2 + (2 + y - z)^2 + (9 + z - x)^2.$$

Ответ: 108.

Решение. Обозначим $a = 7 + x - y$, $b = 2 + y - z$, $c = 9 + z - x$. Заметим, что $a + b + c = 18$. По неравенству о среднем арифметическом и среднем квадратическом имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3} = 108.$$

Осталось заметить, что при $x = 0, y = 1, z = -3$ достигается равенство $(7 + x - y)^2 + (2 + y - z)^2 + (9 + z - x)^2 = 108$. $\square$

Задача 5.2. Даны вещественные числа x, y, z. Найдите минимальное значение выражения

$$(4 + x - y)^2 + (5 + y - z)^2 + (12 + z - x)^2.$$

Ответ: 147.

Задача 5.3. Даны вещественные числа x, y, z. Найдите минимальное значение выражения

$$(10 + x - y)^2 + (2 + y - z)^2 + (3 + z - x)^2.$$

Ответ: 75.

Задача 5.4. Даны вещественные числа x, y, z. Найдите минимальное значение выражения

$$(8 + x - y)^2 + (11 + y - z)^2 + (5 + z - x)^2.$$

Ответ: 192.

Задача 6. Система счисления с основанием m такова, что в ней любое число вида $1011\ldots1101$ (вторая и предпоследняя цифры — нули, а остальные — единицы, в числе хотя бы 4 цифры) делится на 61 (взятое в десятичной системе счисления). Найдите наименьшее такое m.

Ответ: 14.

Решение. Числа 1001_m и 10101_m делятся на 61, то есть $m^3 + 1$ и $m^4 + m^2 + 1$ делятся на 61, откуда $m^4 + m^2 + 1 - m(m^3 + 1) = m^2 - m + 1$ делится на 61. При этом $m^2 - m + 1$ — неотрицательная и монотонная на $m \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что квадратные уравнения $m^2 - m + 1 = 61$ и $m^2 - m + 1 = 122$ не имеют целых решений, а $m^2 - m + 1 = 183$ имеет решение $m = 14$. Следовательно, $m \geqslant 14$.

Покажем, что при $m = 14$ все числа делятся на 61. Действительно, $1011\ldots1101 = m^k + m^{k-2} + m^{k-3} + \ldots + m^3 + m^2 + 1 = (m^k + m^{k-1} + \ldots + m + 1) - m^{k-1} - m = \frac{m^{k+1}-1}{m-1} - m^{k-1} - m = \frac{m^{k+1} - m^k + m^{k-1} - m^2 + m - 1}{m-1} = \frac{(m^2-m+1)(m^k-1)}{m-1}$. Так как $14^2 - 14 + 1$ делится на 61, а $14 - 1 = 13$ — нет, то выражение делится на 61. $\square$

Задача 7.1. На складе имеется неограниченное количество марок достоинством в $134, 135, \ldots, 142, 143$ копейки. Какую наибольшую сумму (в натуральное количество копеек) нельзя набрать этими марками?

Ответ: 2009.

Решение. Почему нельзя набрать 2009 копеек. С одной стороны, $2009 : 143 > 14$, откуда следует, что нужно хотя бы 15 марок, чтобы набрать требуемую сумму. С другой стороны, $15 \cdot 134 = 2010 > 2009$, поэтому 2009 копеек набрать не получится.

Почему суммы, большие 2009, набрать возможно. Заметим, что все суммы от $134n$ до $143n$ можно набрать n марками: сначала можно набрать $134n$ копеек n марками по 134 копейки, а после по одной увеличивать стоимость марок на 1, заменяя одну из марку маркой, стоящей на 1 копейку больше. Заметим, что для $n \geqslant 15$ верно неравенство $143n \geqslant 134(n+1)$. Поэтому для $n \geqslant 15$ отрезок $[134n, 143n]$ содержит в себе отрезок $[134n, 134(n+1)]$. А так как в объединении отрезки $[134n, 134(n+1)]$ для $n \geqslant 15$ покрывают луч $[134 \cdot 15, \infty)$, то и все суммы, не меньшие $134 \cdot 134 = 2010$, набрать получится. $\square$

Задача 7.2. На складе имеется неограниченное количество марок достоинством в $186, 187, \ldots, 201, 202$ копейки. Какую наибольшую сумму (в натуральное количество копеек) нельзя набрать этими марками?

Ответ: 2231.

Задача 8.1. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность с центром H и радиусом HA пересекает прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Оказалось, что точка O совпадает с ортоцентром треугольника APQ. Найдите, чему может быть равен угол $\angle BCA$, если $\angle ABC = 72°$? Ответ выразите целым числом градусов.

Ответ: 48

Решение. Покажем, что $\angle BAC = 60°$. Если это удастся сделать, то ответом на задачу будет $\angle BCA = 180° - 60° - 72° = 48°$.

Обозначим B_1 и C_1 основания высот из точек B и C в треугольнике ABC, а B_2 и C_2 — середины сторон AC и AB соответственно. По условию $HP = HA$ и $HB_1 \perp AP$, значит, B_1 – середина отрезка AP. Аналогично C_1 является серединой отрезка AQ.

Далее, ясно, что $OB_2 \perp AC$ и $OC_2 \perp AB$. Кроме того, O является ортоцентром в треугольнике APQ, значит, точки Q, O, B_2 лежат на одной прямой, и точки P, O, C_2 лежат на одной прямой.

Наконец, обозначим $\angle A = \alpha$. Имеем цепочку равенств

$$AB = 2AC_2 = 2AP \cdot \cos\alpha = 4AB_1 \cdot \cos\alpha = 4AB \cdot \cos^2\alpha,$$

откуда получаем $\cos^2\alpha = 1/4$. Таким образом, $\alpha = 60°$. $\square$

Задача 8.2. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность с центром H и радиусом HA пересекает прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Оказалось, что точка O совпадает с ортоцентром треугольника APQ. Найдите, чему может быть равен угол $\angle BCA$, если $\angle ABC = 55°$? Ответ выразите целым числом градусов.

Ответ: 65

Задача 8.3. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность с центром H и радиусом HA пересекает прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Оказалось, что точка O совпадает с ортоцентром треугольника APQ. Найдите, чему может быть равен угол $\angle BCA$, если $\angle ABC = 44°$? Ответ выразите целым числом градусов.

Ответ: 76

Задача 8.4. Пусть H и O — ортоцентр и центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC соответственно. Окружность с центром H и радиусом HA пересекает прямые AC и AB в точках P и Q соответственно. Оказалось, что точка O совпадает с ортоцентром треугольника APQ. Найдите, чему может быть равен угол $\angle BCA$, если $\angle ABC = 62°$? Ответ выразите целым числом градусов.

Ответ: 58

Задача 9. У Артемия есть куб со стороной 1. Артемий выбрал всеми возможными способами тройки вершин куба, образующие вершины правильного треугольника, и провёл через них плоскость. Таким образом куб разделился на несколько частей. Артемий посчитал объём части, содержащей центр куба. Какое число получил Артемий?

Ответ: $\frac{1}{6}$

Решение. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 — вершины верхней и нижней граней куба соответственно, причём вершины A_i и B_i соединены ребром $(i = 1, \ldots, 4)$. Ясно тогда, что требуемая часть куба есть пересечение тетраэдров $A_1A_3B_2B_4$ и $A_2A_4B_1B_3$, поскольку их грани – это в точности все грани, содержащие вершины правильных треугольников.

Нетрудно видеть, что пересечение этих тетраэдров является октаэдром с вершинами в центрах граней куба. В самом деле, ясно, что сами центры граней лежат в обоих тетраэдрах. В то же время, каждая из граней рассматриваемого октаэдра содержится в одной из граней тетраэдров $A_1A_3B_2B_4$ или $A_2A_4B_1B_3$.

Чтобы посчитать площадь такого октаэдра, достаточно заметить, что он состоит из двух пирамид с высотой $\frac{1}{2}$, основаниями которых являются квадраты со стороной $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Воспользовавшись формулой для объёма пирамиды, получаем, что обе пирамиды имеют объём $\frac{1}{12}$, а значит, объём интересующей нас фигуры равен $\frac{1}{6}$. $\square$

Задача 10.1. Шесть обезьян собирали бананы: каждая собрала по 20 связок с 6 бананами на каждой, по одной связке с 5 бананами и по 10 отдельных бананов. Обезьяны могут как угодно меняться связками бананов при условии, что в конце у всех обезьян также должно быть по 135 бананов. Одна из обезьян — вождь. Каким наибольшим числом отдельных бананов может обладать вождь в конце всех обменов?

Ответ: 51.

Решение. *Оценка*. Суммарное число бананов у каждой обезьяны даёт остаток 3 при делении на 6. При этом оно должно складываться из остатков 0, 1 и 5. Нетрудно видеть, что тогда нужно не менее трёх чисел, дающих ненулевой остаток при делении на 6. Всего связок с 1 и 5 бананами $6\cdot(1+10) = 66$, каждой из 5 обезьян, не являющихся вождём, обязано достаться не менее трёх таких связок, откуда вождю достанется не более $66 - 5 \cdot 3 = 51$ отдельный банан.

Пример. Две обезьяны получают 3 связки по 5 бананов и 20 связок по 6 бананов, две обезьяны — 22 связки по 6 бананов и ещё 3 отдельных банана, а вождь — 14 связок по 6 бананов и 51 отдельный банан. □

Задача 10.2. Шесть обезьян собирали бананы: каждая собрала по 20 связок с 6 бананами на каждой, по две связки с 5 бананами на каждой и по 7 отдельных бананов. Обезьяны могут как угодно меняться связками бананов при условии, что в конце у всех обезьян также должно быть по 137 бананов. Одна из обезьян — вождь. Каким наибольшим числом отдельных бананов может обладать вождь в конце всех обменов?

Ответ: 39.