

Симметрии сфер

1. Сфера вписана в многогранный угол. Докажите, что точки касания сферы со сторонами угла лежат на одной окружности.
2. В четырехгранный угол вписана сфера. Докажите, что суммы противоположных плоских углов этого четырехгранного угла равны.
3. Докажите, что на ребрах тетраэдра можно написать по положительному числу так, чтобы площадь каждой грани была равна сумме чисел на ребрах этой грани.
4. В закрытой крышечке полусферической вазе лежат четыре одинаковых апельсина и грейпфрут. Апельсины касаются вазы, грейпфрут касается всех апельсинов. Верно ли, что точки касания грейпфрута с апельсинами лежат в одной плоскости?
5. В четырехугольную пирамиду $SABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$, можно вписать сферу. Докажите, что сумма площадей граней SAB и SCD равна сумме площадей граней SBC и SDA .
6. На ребрах SA, SB, SC тетраэдра $SABC$ отмечены точки A_1, B_1, C_1 так, что центр описанной сферы тетраэдра $SA_1B_1C_1$ равноудален от точек A, B, C . Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точкам A_1, B_1, C_1 относительно середин ребер SA, SB, SC соответственно. Докажите, что существует сфера, проходящая через точки A_2, B_2, C_2, A, B, C .
7. Дан тетраэдр $SABC$. На плоскости (ABC) вне треугольника ABC построены треугольники DAB, EBC, FCA , конгруэнтные треугольникам SAB, SBC, SCA соответственно. Пусть Ω — сфера, лежащая внутри угла $SABC$, но не внутри тетраэдра $SABC$, касающаяся плоскостей, содержащих грани $SABC$. Докажите, что Ω касается плоскости (ABC) в центре описанной окружности треугольника DEF .
8. Вписанная сфера тетраэдра $SABC$ касается грани ABC в точке X , невписанная сфера касается грани ABC в точке Y (и продолжений граней SAB, SBC, SCA). Докажите, что X и Y изогонально сопряжены относительно треугольника ABC (т.е. что $\angle BAX = \angle YAC$ и т. п.).
9. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω . Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA, SB, SC и плоскости ABC , имеют общую точку.
10. В тетраэдре $ABCD$ проведены высоты BE и CF . Плоскость α перпендикулярна ребру AD и проходит через его середину. Известно, что точки A, C, D и E лежат на одной окружности и точки A, B, D, F также лежат на одной окружности. Докажите, что расстояния от точек E и F до плоскости α равны.
11. Три сферы касаются друг друга и касаются плоскости стола, на котором они лежат, в точках A, B, C . Четвертая сфера касается их трех и также касается

стола в точке S . Докажите, что проекции точки S на стороны треугольника ABC служат вершинами правильного треугольника.