Почти разнобой по неравенствам

1. **(а)** Даны положительные числа a, b, c, для которых выполнено $a + b + c = 1$. Найдите минимальное возможное значение выражения

$$\frac{a}{1+9b^2} + \frac{b}{1+9c^2} + \frac{c}{1+9a^2}.$$

(б) Пусть a, b, c, d — положительные числа с суммой 4. Докажите, что

$$\frac{a+1}{b^2+1} + \frac{b+1}{c^2+1} + \frac{c+1}{d^2+1} + \frac{d+1}{a^2+1} \geqslant 4.$$

(в) Даны неотрицательные числа a, b, c, d, такие что $a + b + c + d = 4$. Докажите, что

$$\frac{1+ab}{1+b^2c^2} + \frac{1+bc}{1+c^2d^2} + \frac{1+cd}{1+d^2a^2} + \frac{1+da}{1+a^2b^2} \geqslant 4.$$

2. **(а)** Докажите для положительных чисел a, b, c, что

$$(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2) \geqslant (a+b+c)^3.$$

(б) Даны положительные числа a, b, c, причём $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{7+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{7+c+a}} + \frac{c}{\sqrt{7+a+b}} \geqslant 1.$$

(в) Пусть $a, b, c > 0$. Докажите, что для всех натуральных k имеет место неравество

$$\frac{a^{k+1}}{b^k} + \frac{b^{k+1}}{c^k} + \frac{c^{k+1}}{a^k} \geqslant \frac{a^k}{b^{k-1}} + \frac{b^k}{c^{k-1}} + \frac{c^k}{a^{k-1}}.$$

3. **(а)** Даны неотрицательные вещественные числа a, b, c, такие что $a + b + c = 1$. Покажите, что

$$1 + 12abc \geqslant 4(ab + bc + ca).$$

(б) Пусть $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \frac{\pi}{2})$, причём $2(\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma) = 3\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$. Докажите, что

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \geqslant 1.$$

(в) Известно, что $a, b, c \geqslant 1$ и $a + b + c = 9$. Докажите, что

$$\sqrt{ab+bc+ca} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

4. **(а)** Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant 0$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n \in [0,1]$. Докажите, что если $k = \lfloor \sum_{i=1}^{n} b_i \rfloor + 1$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

(б) Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ и $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, причём $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_1^{13} + x_2^{13} + \ldots + x_n^{13}$. Докажите, что

$$x_1^{13} y_1 + x_2^{13} y_2 + \ldots + x_n^{13} y_n < x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

(в) Положительные вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таковы, что

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geqslant \sqrt{k} \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажите неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$