

Неравенства

1. Даны числа $0 < a, b, c, d < 1$. Оказалось, что $abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)$. Докажите неравенство

$$a + b + c + d - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

2. По кругу расставлено не менее четырёх неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $1/4$.
3. Положительные x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что

$$\frac{1}{x_1 + 2023} + \frac{1}{x_2 + 2023} + \dots + \frac{1}{x_n + 2023} = \frac{1}{2023}.$$

Докажите, что $\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_n} \geq 2023$.

4. Вещественные числа a и b , большие 1, удовлетворяют неравенству

$$a + \frac{1}{a^2} \geq 5b - \frac{3}{b^2}.$$

Докажите, что $a > 5b - \frac{4}{b^2}$.

5. Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \dots + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} < 2.$$

6. Докажите, что для произвольных $a, b, c > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ac} + \frac{c^9}{ba} + \frac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 2.$$

7. Даны положительные числа x_1, x_2, \dots, x_n и натуральное $k < n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + \dots + x_{k+2}} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_k} \geq \frac{n}{k^2}.$$