Сопряжение

1. Докажите, что для каждого натурального n

$$\sqrt{n^2+1}-n<\frac{1}{2n}.$$

2. Докажите, что функция **(а)** $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}$; **(б)** $\sqrt{x^2+1}-x$; **(в)** $\sqrt{x^2+x}-x$ монотонна на вещественной оси.

3. Даны положительные числа a и b, такие что $a>b$. Докажите, что выполнено неравенство

$$\frac{(a-b)^2}{8a}\leqslant\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\leqslant\frac{(a-b)^2}{8b}.$$

4. **(а)** Для каждого натурального n докажите, что

$$n\sqrt{2}-\lfloor n\sqrt{2}\rfloor>\frac{1}{2n\sqrt{2}}.$$

Здесь $\lfloor x\rfloor$ обозначает *целую часть* числа x.

(б) Докажите, что для любых натуральных m и n выполнено неравенство

$$\left|\sqrt{2}-\frac{m}{n}\right|>\frac{1}{10n^2}.$$

5. Пусть $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, $b_n=\sqrt{4n+2}$. Докажите, что

$$0<b_n-a_n<\frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

6. Докажите, что если a и b — ненулевые целые числа, по модулю не превосходящие 100, то $\left|a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\right|>1/350$.

7. Пусть

$$f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$$

Найдите $f(1)+f(2)+\ldots+f(40)$.

8. Положим $a_1=\frac{1}{2}$ и

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}.$$

Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{2023}a_k<1,04$$

(при решении этой задачи можно воспользоваться калькулятором).