

Таблицы

1. Некоторые клетки доски 2023×2023 закрашены. Известно, что нет такой тройки закрашенных клеток A, B, C , что A и B лежат в одной строке, а B и C – в одном столбце. Какое наибольшее число клеток могло быть закрашено?
2. Квадратная таблица $n \times n$ заполнена числами. Подсчитаны $2n$ сумм по строкам и по столбцам. При каких n может оказаться, что среди этих сумм встретятся все целые числа от 1 до $2n$?
3. Прямоугольная доска с 2023 строчками и 2024 столбцами разбита на прямоугольники 1×2 . Известно, что в любом другом разбиении этой доски на прямоугольники 1×2 найдется прямоугольник, содержащийся и в исходном разбиении. Докажите, что в исходном разбиении имеются два соседних столбца таблицы, заполненные 2023 горизонтальными прямоугольниками.
4. В клетках доски $n \times n$ расставлены нули и единицы. Во всех клетках левого столбца стоят единицы, и в каждой фигурке вида $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ (состоящей из клетки и ее соседей слева и снизу) сумма чисел четна. Докажите, что в таблице нет двух одинаковых строк.
5. Назовём лабиринтом шахматную доску 8×8 , где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе — плохим. Каких лабиринтов больше — хороших или плохих?
6. Из 40 белых клеток доски 9×9 , покрашенной в шахматном порядке в черный и белый цвета, вырезаны девять. Докажите, что оставшуюся часть нельзя разрезать на уголки из трех клеток.
7. В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы одной из строк.
8. Каждая клетка клетчатой плоскости раскрашена в один из n^2 цветов так, что в каждом квадрате из $n \times n$ клеток встречаются все цвета. Известно, что в какой-то строке встречаются все цвета. Докажите, что существует столбец, раскрашенный ровно в n цветов.