

Экстремальные графы

1. Найдите максимальное количество рёбер в графе на v вершинах, если в нём нет

(а) звезд $K_{1,n}$;

(б) циклов чётной длины.

Определение. Назовём наследственным свойством графа свойство, выполненное для всех его подграфов.

2. **Лемма о наследственном свойстве.** Пусть $P(v)$ — наибольшее количество рёбер в графе с v вершинами, обладающим наследственным свойством P . Докажите, что $P(v) \leq \frac{v}{v-2}P(v-1)$.

3. Найдите максимальное количество рёбер в графе на v вершинах, если в нём нет (а) треугольников (б) двух треугольников, граничащих по ребру.

4. За круглым столом сидят n человек. Разрешается поменять местами любых двух людей, сидящих рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

5. В графе любые два простых цикла нечётной длины не имеют общих рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы каждая вершина была соединена ребром не более чем с одной вершиной такого же цвета.

6. (а) Докажите, что если в графе на v вершинах нет циклов длины 4, то в нём не более

$$\frac{v + \sqrt{4v - 3}}{4}$$

рёбер.

(б) Докажите, что если граф G с v вершинами не содержит подграфа $K_{n,m}$, то выполняется неравенство

$$d(d-1) \dots (d-m+1) \leq (n-1)(v-1)(v-2) \dots (v-m+1),$$

где d — средняя степень вершины.