Сумма по Минковскому

Определение. Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^2$ — подмножества координатной плоскости. Их *суммой по Минковскому* называется множество

$$A + B = \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\} \subset \mathbb{R}^2.$$

1. Найдите сумму по Минковскому

(а) множества A и точки;

(б) двух параллельных отрезков с длинами ℓ_1 и ℓ_2;

(в) двух непараллельных отрезков с длинами ℓ_1 и ℓ_2, угол между которыми равен α;

(г) трёх попарно непараллельных отрезков;

(д) двух кругов радиусов r_1 и r_2;

(е) двух окружностей радиусов r и R $(r < R)$;

(ж) круга и треугольника.

2. Даны круг Λ радиуса ε и многоугольник Γ периметра P и площади S. Найдите площадь и периметр фигуры $\Lambda + \Gamma$.

3. На плоскости даны два выпуклых многоугольника A и B. Расставим стрелки на сторонах обоих многоугольников по направлению против часовой стрелки и обозначим полученные векторы $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ и $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$, причём $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$ сонаправлены (если сторона, соответствующая некоторому направлению, есть только в одном многоугольнике, то считаем второй вектор равным нулю). Обозначим также $\vec{c}_1 = \vec{a}_1 + \vec{b}_1, \ldots, \vec{c}_n = \vec{a}_n + \vec{b}_n$.

(а) Докажите, что существует такой выпуклый многоугольник C, при обходе сторон которого по часовой стрелки получается набор из векторов $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n$.

(б) Докажите, что $C = A + B$.

(в) Докажите, что периметр суммы Минковского двух выпуклых многоугольников равен сумме периметров этих многоугольников.

4. Выпуклый многоугольник периметра P разрезали прямолинейным разрезом длины ℓ на две части. Обозначим через A множество середин отрезков с концами в разных частях. Найдите периметр A.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — подмножество координатной плоскости. *Симметризацией по Минковскому* множества A называется множество

$$A^{\mathrm{sym}} = \frac{A + (-A)}{2} = \{\frac{a - a'}{2} \,:\, a, a' \in A\}.$$

5. Проекция выпуклой фигуры A на любую прямую имеет длину 1. Докажите, что A^{sym} — это круг диаметра 1.

6. Дан выпуклый многоугольник диаметра 1. Докажите, что его периметр не превосходит π.

7. На плоскости дан выпуклый n-угольник со сторонами $a_1, \ldots, a_n$. Обозначим $d_1, \ldots, d_n$ длины проекций этого многоугольника на прямые, содержащие соответствующую сторону. Докажите, что

$$2 \leqslant \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} \leqslant 4.$$