

Разнойбой

1. Даны нечётные натуральные $m, n > 3$. Клетки доски $m \times n$ окрашены в чёрный и белый цвет. Обозначим через A количество строк, в которых чёрных клеток больше, чем белых, через B — количество столбцов, в которых белых клеток больше, чем чёрных. Найдите наибольшее возможное значение $A + B$.
2. Докажите, что для положительных a, b, c, d выполнено неравенство:

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + d^2)(d^2 + a^2) \geq 64abcd \cdot |(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)|.$$

3. В вершинах правильного n -угольника расставлены положительные числа. На каждой стороне красным маркером записана сумма чисел в вершинах, а синим — сумма их обратных. Оказалось, что произведение любого красного и любого синего числа (не обязательно записанных на одной и той же стороне) больше 4. Чему может быть равно n ?
4. Точка K — середина диагонали AC четырёхугольника $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает отрезок AK в точке P . Серединный перпендикуляр к стороне AD пересекает отрезок CK в точке Q . Лучи QB и DP пересекаются в точке R . Докажите, что проекция точки A на прямую BC лежит на прямой RK .
5. Строки и столбцы таблицы $n \times n$ пронумеровали числами от 0 до $n-1$ (снизу вверх и слева направо соответственно). Таким образом, каждая клетка задаётся номером строки и столбца, в котором она стоит. (Нижняя левая клетка — $(0, 0)$.) В каждую из остальных клеток (i, j) записали число $\frac{1}{i^2 + j^2}$.
Рассматриваются все возможные пути из левого нижнего угла доски (клетки $(0, 0)$) в правый верхний, где каждый ход делается на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Назовём *ценой* пути произведение чисел в клетках этого пути (не включая концы). Чему равна суммарная стоимость всех путей из левого нижнего угла в правый верхний?
6. Даны вещественные числа a, b, c и d такие, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Найдите наименьшее значение выражения $(a - 2b)(c - 2d)$.
7. Докажите, что вершины любого графа можно раскрасить в белый, синий и красный цвета (не обязательно использовать все три цвета) так, чтобы выполнялись следующие условия:
 - 1) белых и красных вершин поровну;
 - 2) нет рёбер, соединяющих красную вершину с белой;
 - 3) существует путь, проходящий по всем синим вершинам ровно по одному разу (и не проходящий по белым и красным вершинам), или синих вершин не более одной.