Вокруг леммы Рени

1. **(а)** По кругу выписано несколько целых чисел с единичной суммой. Докажите, что есть ровно один способ выбрать начальное число так, чтобы все частичные суммы были положительны.

   (б) По кругу в некотором порядке выписаны числа 1 и $-k$, ($k \in \mathbb{N}$) с суммой $S \geqslant 0$. Докажите, что есть ровно S способов выбрать начальное число так, чтобы все частичные суммы были положительны.

2. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько бензоколонок. Известно, что суммарно бензина хватает, чтобы на машине объехать круг целиком. Докажите, что можно так выбрать бензоколонку, чтобы стартовав в ней, машина могла объехать кольцевую дорогу по часовой стрелке и вернуться в исходное место.

3. **(а)** Докажите, что количество подвешенных деревьев из n вершин выходящей степени t (все рёбра ориентированы вниз по направлению подвешивания) и $n(t-1)+1$ висячих вершин равняется
$$\frac{1}{tn+1}C_{tn+1}^{n}.$$

   (б) Сколько существует упорядоченных подвешенных лесов из s деревьев, n вершин степени t и $n(t-1)+s$ висячих вершин?

4. Пусть в условиях задачи **2** суммарно бензина хватает, чтобы на машине проехать 2 круга целиком. Докажите, что можно так выбрать бензоколонку, чтобы две машины могли объехать кольцевую дорогу, одна по часовой стрелке, а другая — против.

5. На 99 карточках написаны различные действительные числа — по одному числу на каждой карточке. Сумма всех 99 чисел иррациональна. Стопка из 99 карточек называется *неудачной*, если для каждого натурального k от 1 до 99 сумма чисел на k верхних карточках иррациональна. Петя вычислил, сколькими способами можно сложить исходные карточки в неудачную стопку. Какое наименьшее значение он мог получить?

6. На n карточках написаны целые числа, не большие, чем 1, с положительной суммой (например: 1,1,1,0,0,0,-2). Поднабор карточек назовем *интересным*, если сумма чисел на этих карточках равна 1. Для всякого интересного набора напишем на доске число $(k-1)!(n-k)!$, где k — число карточек в этом наборе. Докажите, что сумма выписанных на доску чисел равна $n!$. (В приведенном примере мы 3 раза напишем 0!6!, 9 раз 1!5!, 9 раз 2!4!, 4 раза 3!3!, 3 раза 4!2!, 3 раза 5!1!, 1 раз 6!0! — в сумме 7!)