Вероятностные задачи

0. Через $p_n(k)$ обозначим количество перестановок длины n, которые оставляют на месте ровно k элементов. Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$

1. Докажите, что из любого графа можно выкинуть не более $1/d$ ребер так, чтобы стало возможным раскрасить его вершины в d цветов правильным образом (то есть чтобы никакие две вершины одного цветы не были смежными).

2. Методом пристального взгляда найдите

$$\sum_{i=0}^{n} C_{m+i}^{i} 2^{-(m+i+1)} + \sum_{i=0}^{m} C_{n+i}^{i} 2^{-(n+i+1)}.$$

3. В таблице $n \times n$ каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается ровно n раз. Докажите, что существует ряд (строка или столбец), в котором не менее $\sqrt{n}$ различных чисел.

4. Каждый житель посёлка Большие Коты знаком не менее чем с 60% населения. Докажите, что существует четыре жителя, которые в объединении знают не менее 97% населения.

5. Добрые горцы имеют силы a_i , $i \leqslant N$, а злые b_i, $i \leqslant M$. В схватке двух горцев с силами a и b первый побеждает с вероятностью $a/(a+b)$, а второй — с $b/(a+b)$. Победитель высасывает силы побежденного. Горцы будут сражаться друг с другом до тех пор, пока не останется только один. Добрые горцы хотят максимизировать вероятность своей победы, выбирая кому с кем сражаться в каждом раунде. Как им максимизировать шансы на победу?[1]

6. Игрок пытается угадать какой из m фруктов появится на экране. За серию из k угаданных фруктов он получает $1+2+\ldots+k$ монет. Сколько в среднем монет он заработает за n раундов?

7. В квадратной коробке 1 на 1 метр бегает 81 муравей. Показать, что можно накрыть стаканом радиусом 1/7 метра по крайней мере 4 штуки.

8. На плоскости даны 10 точек. Докажите, что их можно накрыть непересекающимися кругами радиуса 1.

9. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)},$$

где $f(n)$ — число единиц в двоичной записи числа n.

[1]Смешно.