

Всё сложится

Один из основных способов нахождения суммы ряда - телескопирование. Его идея в том, чтобы в сумме $a_1 + a_2 + \dots$ каждое слагаемое представить разностью $(b_{i+1} - b_i)$ для некоторой последовательности b_j .

1. Найдите сумму (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;
 (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$; (г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(3^n x)}{3^n}$; (д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n F_{n+2}}$;
 (е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+2}}$; (ж) $\sum_{i=1}^{\infty} \arctg \frac{2}{n^2}$;

Другой способ нахождения суммы ряда - знание разложения в ряд классических функций: $\frac{1}{1-x}$, e^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, ... (для этого полезно знать что такое ряд Тейлора). Также иногда помогает идея дифференцирования.

2. Найдите сумму (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^n}$;
 (в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; (г) $\sum_{k=1}^n \cos kx$ (где $x \neq 2\pi s$, $s \in \mathbb{Z}$);
 (д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; (е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n}$; (ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

Иногда надо просто ограничить сумму ряда. Для этого порой достаточно каждое слагаемое оценить слагаемым другого сходящегося ряда. А порой оказывается полезен интеграл.

3. Докажите, что (а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$; (б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < 2$;
 (в) $2(\sqrt{n+1} - 1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$;
 (г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < 100$, где $a_i - i$ -ое по счёту натуральное число без единиц в десятичной записи;
 (д) $\sum_{k=1}^n \frac{\varphi(k)}{2^{k-1}} < 2$.