Геометрический разнобой

1. В остроугольном треугольнике $ABC (AB < BC)$ провели высоту BH. Точка P симметрична точке H относительно прямой, соединяющей середины сторон AC и BC. Докажите, что прямая BP содержит центр описанной окружности треугольника ABC.

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на сторону CD, проходит через середину диагонали BD, а перпендикуляр, опущенный из точки D на сторону AB, проходит через середину диагонали AC. Докажите, что трапеция равнобокая.

3. На стороне треугольника AC треугольника ABC взяли такую точку D, что угол BDC равен углу ABC. Чему равно наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD, если $BC = 1$.

4. Внутри равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K так, что $AB = BC = CK$ и $\angle KAC = 30°$. Найдите угол AKB.

5. В треугольнике ABC выбрана такая точка P, что $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с I.

6. Точки O и H – центр описанной окружности и точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC; M и N – середины отрезков AH и BH. Оказалось, что точки H, M, N и O лежат на одной окружности. Докажите, что эта окружность касается описанной окружности треугольника ABC.

7. В треугольнике ABC угол при вершине A тупой. На сторонах AB, BC и AC выбраны точки C_1, A_1 и B_1 соответственно так, что $AB \parallel A_1B_1$ и $AC \parallel A_1C_1$. Касательные в точках B и C к описанной окружности треугольника ABC пересекаются в точке D. Отрезок A_1D пересекает окружность, описанную около треугольника AB_1C_1, в точке K. Докажите, что прямые AK и BC параллельны.

8. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AP и отметили середину M стороны AB. Известно, что стороны треугольника удовлетворяют соотношению $AC + BC = \sqrt{2}AB$. Докажите, что описанная окружность треугольника BMP касается прямой AC.