

ММО

1. Найдите наименьшее натуральное число, кратное 80, в котором можно так переставить две его различные цифры, что получившееся число также будет кратно 80.
2. Существует ли x , для которого $\arcsin^2 x + \arccos^2 x = 1$?
3. Внутри трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N так, что $AM = CN$ и $BM = DN$, а четырёхугольники $AMND$ и $BMNC$ — вписанные. Докажите, что прямая MN параллельна основаниям трапеции.
4. Существуют ли такое натуральное n и такой многочлен $P(x)$ степени n , имеющий n различных действительных корней, что при всех действительных x выполнено равенство (а) $P(x)P(x+1) = P(x^2)$; (б) $P(x)P(x+1) = P(x^2+1)$?
5. Три велосипедиста ездят в одном направлении по круглому треку длиной 300 метров. Каждый из них движется со своей постоянной скоростью, все скорости различны. Фотограф сможет сделать удачный снимок велосипедистов, если все они окажутся на каком-либо участке трека длиной d метров. При каком наименьшем d фотограф рано или поздно заведомо сможет сделать удачный снимок?
6. При каких натуральных n для любого натурального $k > n$ найдётся число с суммой цифр k , кратное n ?
7. На гранях единичного куба отметили 8 точек, которые являются вершинами меньшего куба. Чему может быть равна длина его ребра?
8. В Чикаго орудует 36 преступных банд, некоторые из которых враждуют между собой. Каждый гангстер состоит в нескольких бандах, причем любые два гангстера состоят в разных наборах банд. Известно, что ни один гангстер не состоит в двух бандах, враждующих между собой. Кроме того, оказалось, что каждая банда, в которой не состоит некоторый гангстер, враждует с какой-то бандой, в которой данный гангстер состоит. Какое наибольшее количество гангстеров может быть в Чикаго?