

Разной по многочленам

1. Дан приведённый многочлен $f(x)$ четвёртой степени, причём $f(1) = 10$, $f(2) = 20$, $f(3) = 30$. Найдите, чему равно $f(10) + f(-6)$.
2. Учитель написал на доске квадратное уравнение $x^2 + 10x + 20 = 0$, после чего каждый из учеников по очереди увеличивал или уменьшал на единицу либо коэффициент при x , либо свободный член. В результате на доске оказалось написано уравнение $x^2 + 20x + 10 = 0$. Верно ли, что в некоторых момент на доске было написано уравнение с целыми корнями?
3. Найдите все такие многочлены $p(x)$ с вещественными коэффициентами, для которых существует такой многочлен $q(x)$ с вещественными коэффициентами, что

$$p(1) + p(2) + \dots + p(n) = p(n)q(n).$$

4. Докажите, что для любых ненулевых многочленов P и R с рациональными коэффициентами существует многочлен Q такой, что $P(x)$ делит $Q(R(x))$.
5. Существует ли пара многочленов с целыми коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степени выше первой, удовлетворяющих тождеству

$$P(Q(x)) = x^{3375} + 3375x^{3374} + 2x + 1.$$

6. Найдите все многочлены с вещественными коэффициентами, удовлетворяющие равенству

$$P(x)^2 + 1 = P(x^2 + 1).$$

7. Вадим придумал приведённый многочлен с вещественными коэффициентами и выяснил, что среди значений этого многочлена в натуральных числах встречаются все натуральные степени двойки. Докажите, что Вадим придумал линейный многочлен.