Простые задачи

1. Незнайка нарисовал прямоугольник, разделил его на 64 меньших прямоугольника, проведя по 7 прямых, параллельных каждой из сторон исходного прямоугольника. После этого Знайка указывает одновременно на n прямоугольников разбиения, а Незнайка называет площадь каждого из этих прямоугольников. При каких значениях n Знайка сможет гарантированно узнать размеры прямоугольника?

2. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, каждое из которых делится на количество его натуральных делителей.

3. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, в котором $DA < AB = BC < CD$. На сторонах CD и AB выбраны точки E и F такие, что $BE \perp AC$ и $EF \parallel BC$. Докажите, что $FB = FD$.

4. Существует ли такой квадратный трёхчлен $f(x)$, что для любого натурального n уравнение $f(f(\ldots f(x))) = 0$ (n букв "f") имеет ровно 2^n различных действительных корней?

5. Есть таблица 15×100 (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит по фишке. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.

6. Докажите, что среди любых 9 натуральных чисел, взаимно простых с 1001, найдутся два, сумма которых также будет взаимно проста с 1001.

7. Если x — положительное действительное число, а n — целое положительное число, докажите, что

$$[nx] > \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \cdots + \frac{[nx]}{n},$$

где $[t]$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное t.

8. Пусть O и H — центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Точки M и D лежат на стороне BC так, что $BM = CM$ и $\angle BAD = \angle CAD$. Луч MO пересекает описанную окружность треугольника BHC в точке N. Докажите, что $\angle ADO = \angle HAN$.