

Средние задачи

1. В пространстве отметили 5 точек. Могло ли так оказаться, что для любого элемента n множества $\{1, 2, \dots, 10\}$, существуют две отмеченные точки, расстояние между которыми равно n .
2. В турнире по теннису участвовало несколько школьников. За время турнира каждый школьник сыграл с каждым ровно по одному разу. Подмножество участников турнира, называется упорядоченным, если их можно выстроить в шеренгу так, чтобы каждый игрок выиграл у каждого игрока сзади. Известно, что для любого школьника A подмножество участников, проигравших A , является упорядоченным. Докажите, что множество участников турнира можно разбить на не более чем три попарно не пересекающихся упорядоченных подмножества.
3. На доске записаны числа 19 и 98. Каждую минуту каждое из чисел либо возводят квадрат, либо увеличивают на 1. Может ли на доске оказаться два равных числа в какой-то момент времени?
4. Пусть ABC — равнобедренный треугольник с основанием BC . На стороне BC выбрана точка D . Окружность с центром в точке D с радиусом DC пересекает окружность, описанную вокруг треугольника ABD в точках P и Q (Q ближе к B). Прямая BQ пересекает AD в точке X , а AC в точке Y . Докажите, что $PDXY$ — вписанный.
5. Найдите все конечные множества натуральных чисел S , содержащие хотя бы два элемента, обладающие следующим свойством: если $m > n$ — элементы S , то и $\frac{n^2}{m-n}$ — элемент S .
6. Бесконечная последовательность ненулевых чисел a_1, a_2, a_3, \dots такова, что при всех $n > 2024$ число a_{n+1} является наименьшим корнем многочлена

$$P_n(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + a_2 x^{2n-4} + \dots + a_n$$

Докажите, что существует такое N , что в бесконечной последовательности $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ каждый член меньше предыдущего.

7. В классе k учеников. За январь каждый из них несколько раз сходил на кружок (кружок проходит каждый день). Выяснилось, что все количества посещений кружка у учеников различны. Более того, для любых двух учеников, множества дней, когда они приходили на кружок не содержатся друг в друге. Найдите максимальное значение k .
8. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B, C , а также касаются плоскости α в точках D, E, F . Докажите, что радиус описанной вокруг треугольника ABC окружности меньше, чем радиус окружности описанной вокруг треугольника DEF .