

Геометрия

1. На прямой BC неравностороннего треугольника ABC за точками B и C взяли точки P и Q соответственно так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внеписанная окружность треугольника ABC , соответствующая вершине A , имеет центр J и касается прямых AB , AC в точках D , E соответственно. Прямые DP и QE пересекаются в точке F . Докажите, что $\angle AFJ = 90^\circ$.
2. Биссектриса угла A неравностороннего треугольника ABC повторно пересекает его описанную окружность в точке D . Окружность с центром в точке D и радиусом DC повторно пересекает AC в точке B' . Прямая BB' пересекает описанную окружность в точке E . Докажите, что B' является ортоцентром треугольника AED .
3. Окружность с центром в точке O касается основания BC равностороннего треугольника ABC в точке B и проходит через точку A . На прямой AB отмечена точка D так, что $\angle ACD = 90^\circ$. Докажите, что отрезок OD виден из середины отрезка BC под прямым углом.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a и BH_b . Прямая H_aH_b пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Точка A' симметрична точке A относительно BC , точка B' симметрична точке B относительно AC . Докажите, что точки A' , B' , P и Q лежат на одной окружности.
5. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках Y и Z . Окружность ω касается ω_1 и ω_2 внешним образом в точках A и B соответственно. Докажите, что биссектрисы углов ZAY и YBZ пересекаются на прямой YZ .
6. В треугольнике ABC отметили ортоцентр H и центр описанной окружности O . Серединный перпендикуляр к CH пересекает стороны AC и BC в точках X и Y соответственно. Прямые XO и YO пересекают отрезок AB в точках P и Q . Оказалось, что $YQ + XP = AB + XY$. Найдите угол $\angle CHO$.
7. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AA_1 , BB_1 , CC_1 и отметили ортоцентр H . Точки M и S являются серединами отрезков BC и AH соответственно. Точка G является пересечением прямых B_1C_1 и AH , а N — пересечением медианы AM и описанной окружности треугольника BCH . Докажите, что $\angle HMA = \angle GNS$.
8. Вписанная окружность треугольника ABC имеет центр I и касается сторон треугольника в точках A_1 , B_1 , C_1 . Через точку I провели прямую ℓ . Точки A' , B' , C' симметричны A_1 , B_1 , C_1 относительно ℓ . Докажите, что AA' , BB' , CC' пересекаются в одной точке.