Алгебра

1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2024}$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, 2024$. Какое наибольшее количество чисел среди чисел $a_1^2 + a_2, a_2^2 + a_3, \ldots, a_{2023}^2 + a_{2024}, a_{2024}^2 + a_1$ могут быть точными квадратами?

2. Даны вещественные числа $x, y, z > 1$. Докажите неравенство

$$\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leqslant \frac{x-1}{y-1} + \frac{y-1}{z-1} + \frac{z-1}{x-1}.$$

3. Во всех рациональных точках действительной прямой расставлены целые числа. Докажите, что найдётся такой отрезок, что сумма чисел на его концах не превосходит удвоенного числа в его середине.

4. Докажите, что для любого простого p среди любых $p + 1$ подряд идущих чисел Фибоначчи найдётся число, делящееся на p.

5. Дан многочлен $P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, у которого каждый коэффициент a_i принадлежит отрезку $[100, 101]$. При каком минимальном натуральном n у такого многочлена может найтись действительный корень?

6. Даны положительные числа x, y, z. Докажите неравенство

$$\frac{x-y}{xy+2y+1} + \frac{y-z}{yz+2z+1} + \frac{z-x}{zx+2x+1} \geqslant 0.$$

7. Даны натуральное число n и нечётное натуральное число k. Целые числа a, b, c таковы, что $a^n + kb = b^n + kc = c^n + ka$. Докажите, что $a = b = c$.

8. Дано двадцать положительных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать два таких a и b, что

$$\frac{|a-b|}{1+ab} < \frac{1}{10}.$$