Комбинаторика

1. Вершины правильного 100-угольника покрашены в 10 цветов. Докажите, что у этого 100-угольника найдутся 4 вершины, являющиеся вершинами прямоугольника и покрашенные не более чем в два различных цвета.

2. На клетчатой доске 300×300 по линиям сетки расположено несколько попарно несоприкасающихся кораблей 1×300 (неизвестно, сколько именно). Разрешается сделать k выстрелов по любым клеткам, после чего будет объявлено, какие именно выстрелы попали в какой-то корабль. По этим результатам нужно определить местоположение всех кораблей. При каком наименьшем k это гарантированно удастся?

3. Есть k серебряных и n золотых монет. Все серебряные монеты весят одинаково, все золотые тоже одинаково и легче серебряных. Также есть двухчашечные весы, которые всегда показывают неправильный результат (могут показать любой из двух).

   (а) Пусть $k = 1$. Какое наибольшее количество золотых монет можно гарантированно определить при остальных n?

   (б) Пусть k и n — произвольные натуральные числа. Какое наибольшее количество монет каждого типа можно гарантированно определить?

4. Внутри прямоугольника R отмечены n точек так, что никакие две из них не лежат на прямой, параллельной одной из сторон прямоугольника. Рассмотрим разбиение R на прямоугольники такое, что никакая из отмеченных точек не попала строго внутрь никакого прямоугольника разбиения. Докажите, что прямоугольников в разбиении хотя бы $n + 1$.

5. Лёша и Артём играют в игру «Морской бой-2000». На доске 1×2000 они по очереди ставят на свободные клетки доски букву «S» или «O», начинает Лёша. Выигрывает тот, кто первым получает слово «SOS». Каков результат игры при правильной игре?

6. Какое наибольшее количество попарно непересекающихся пар из элементов множества $\{1, 2, \dots, 3000\}$ можно выбрать так, чтобы суммы элементов в парах были различными числами, не превосходящими 3000?

7. Дано натуральное $n > 1$. Монетный двор собирается выпустить n типов монет с натуральными достоинствами $a_1 < \dots < a_n$. Закон требует, чтобы сумму $S = a_1 + \dots + a_n$ можно было набрать этими монетами единственным способом (взяв по одной монете каждого достоинства).

   (а) Докажите, что Монетный двор может соблюсти закон при некотором $S < n2^n$.

   (б) Докажите, что Монетный двор не может соблюсти закон, если $S \leqslant n2^{n-1}$.