Центральные точки

Определение. Пусть дано множество M на плоскости из n точек. Точка X называется центральной точкой для этого множества, если любая прямая, проходящая через X, делит плоскость на две части, каждая из которых (вместе с проведённой прямой) содержит не менее чем $\frac{n}{3}$ точек из M.

Теорема о центральной точке. Для любого конечного множества точек на плоскости найдётся центральная точка.

Научимся её строить. Пусть M — множество из n точек на плоскости. Рассмотрим множество $\mathcal{C}$ всех выпуклых фигур, таких что они содержат более $\frac{2n}{3}$ точек из M.

1. Докажите, что если все фигуры из $\mathcal{C}$ имеют общую точку, то она является центральной.
2. **(а)** Докажите, что любые три фигуры из $\mathcal{C}$ пересекаются по непустой выпуклой фигуре.

   (б) Докажите, что все фигуры из $\mathcal{C}$ имеют общую точку.

   (в) Докажите, что существует такая точка X в пересечении двух фигур из C, что любая другая фигура из $\mathcal{C}$, не содержащая X, содержит точки, лежащие выше X.

Замечание. Таким образом, мы доказали теорему о центральной точке для плоскости.

3. Приведите пример, показывающий неулучшаемость оценки $\frac{1}{3}$ в теореме о центральной точке.
4. Докажите, что для любого множества M из n точек на плоскости существуют такие точки плоскости P и Q, что все выпуклые фигуры, содержащие более $\frac{4n}{7}$ точек из M, также содержат P или Q.
5. Придумайте меньшую оценку, чем $\frac{4n}{7}$ в предыдущей задаче, но для трёх точек.
6. На плоскости расположено 36 точек. Докажите, что существует не менее 660 треугольников (среди которых могут быть вырожденные) с вершинами в данных точках, содержащих некоторую центральную точку X.
7. На плоскости есть множество M из $3n$ точек. Пусть X — центральная точка этого множества. Докажите, что точки M можно разбить на тройки так, чтобы X попала в каждый треугольник, образованный тройкой точек.
8. **(Теорема о центральной точке для $\mathbb{R}^d$.)** Пусть в $\mathbb{R}^d$ есть множество M из n точек. Тогда существует такая точка X, что любое полупространство, содержащее X, содержит не менее $\frac{n}{d+1}$ точек из M.
9. Докажите, что существует пример из n точек на плоскости, таких что нет трёх точек, которые в совокупности ”прокалывают” все выпуклые фигуры, содержащие не менее $\frac{5n}{11}$ из данных точек.