

Функциональные уравнения

1. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

(а) $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$;

(б) $f(x + f(y)) = x + y$;

(в) $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.

2. (а) Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$2f(x) + f(1 - x) = x^2.$$

(б) Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что для всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ выполнено

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x.$$

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

(а) $f(x) + f(x + f(y)) = 2x + y$;

(б) $f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y$.

4. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

5. (а) Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, удовлетворяющие равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$.

(б) Найдите все функции $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, удовлетворяющие равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{Q}$;

(в) Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$, удовлетворяющие равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$;

6. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq}$, такие что для всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено

(а) $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$;

(б) $f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$.

7. Найдите все функции $f : \mathbb{Z}_{\geq} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq}$, такие что

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \quad \text{для всех } m, n \in \mathbb{Z}_{\geq}.$$

8. Найдите все функции $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такие что $f(f(n)) + f(n + 1) = n + 2$ для любого $n \in \mathbb{N}$.