Теорема Кронекера

1. Кузнечик прыгает по окружности длины 1. Каждую секунду он прыгает по часовой стрелке на дугу длины α, где α – иррациональное число.

(а) Докажите, что не позже чем через 1000 секунд он окажется на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от своего исходного положения (расстояние считается по окружности).

(б) Докажите, что через некоторое время кузнечик окажется на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

2. **(а)** Два кузнечика прыгают по окружности длины 1. Они стартуют одновременно из одной точки и за каждую секунду первый прыгает по часовой стрелке с шагом длины α, а второй –- с шагом длины β. Докажите, что в какой-то момент времени (не позднее чем через 1000^2 секунд) оба кузнечика одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от исходной точки.

(б) Та же задача для n кузнечиков и 1000^n секунд.

3. В начале координат сидит охотник, а во всех остальных целочисленных точках координатной плоскости сидит по круглому зайцу радиуса $\varepsilon > 0$. Докажите, что в каком бы направлении ни выстрелил охотник, он попадёт в какого-нибудь зайца.

4. Две мошки ползут по окружности длины 1 по часовой стрелке с постоянными скоростями, причем отношение этих скоростей иррационально. Они стартуют одновременно из каких-то начальных точек (возможно, разных). Докажите, что в какой-то момент обе мошки одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

5. Два кузнечика прыгают по окружности длины 1. Они стартуют одновременно из каких-то начальных точек (возможно, разных), и за каждую секунду первый прыгает по часовой стрелке с шагом длины α, а второй – с шагом длины β, причем число $k\alpha + l\beta$ не является целым для любых целых k, l, не равных одновременно 0. Докажите, что в какой-то момент времени оба кузнечика одновременно окажутся на расстоянии меньше чем $\frac{1}{1000}$ от фиксированной точки A.

Определение. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *рационально независимыми*, если для любых рациональных чисел $c_1, \ldots, c_n$, таких что $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_n\alpha_n = 0$, выполнено $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

6. Числа $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ рационально независимы. Докажите, что кузнечики с длинами прыжков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ одновременно окажутся сколь угодно близко к любой точке единичной окружности, вне зависимости от того, где они начинают.

7. **(а)** Докажите, что некоторая степень двойки начинается с цифр 202320232023.

(б) Докажите, что существует число Фибоначчи, начинающееся с цифр 2023.

(в) Существует ли такое натуральное n, что число 2^n начинается с цифр 123, а число 3^n — с цифр 456.

(г) А если 3^n заменить на 5^n?

8. Докажите, что последовательность первых цифр чисел 2^n не периодична ни с какого места.

9. Существует ли непостоянная арифметическая прогрессия длины 2023^{2023}, все члены которой состоят из одних и тех же цифр?

10. Докажите, что бесконечно много степеней числа **(а)** 3; **(б)** 2 начинаются на те же 100 цифр, что и заканчиваются.