Теорема Форда-Фалкерсона

Определение. Пусть задано множество вершин V , среди которых выделено две: вход s и выход t. Пусть задана функция $c\colon V \times V \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

$$c(x,y) > 0, \quad c(x,s) = 0, \quad c(t,y) = 0.$$

Тогда четверка $G = (V,s,t,c)$ называется *сетью*, а функция c — *пропускной способностью* этой сети.

Определение. Если функция $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

1. $f(x,y) \leqslant c(x,y)$,
2. $f(x,y) = -f(y,x)$,
3. если $x \neq s$ и $x \neq t$, то $\Sigma_{y\in V} f(x,y) = 0$,

то f называется *потоком* в сети G. Значение $|f| = \Sigma_{x\in V} f(s,x)$ называется *величиной потока*. Поток называется максимальным, если его величина максимальна.

Определение. Пусть множество V разбито на две части S и T, причем $s \in S$, $t \in T$. Тогда пару (S,T) будем называть *разрезом* сети G. *Потоком через разрез* (S,T) будем называть величину $f(S,T) = \Sigma_{x\in S, y\in T} f(x,y)$. *Пропускной способностью разреза* (S,T) — величину $c(S,T) = \Sigma_{x\in S,y\in T} c(x,y)$. Разрез называется *минимальным*, если его пропускная способность минимальна.

Определение. Для потока f в сети G определим *остаточную сеть* G_f с теми же множеством вершин, входом и выходом, пропускная способность которой задана следующим образом $c_f(x,y) = c(x,y) - f(x,y)$.

Определение. Проведем на множестве вершин V ориентированные ребра из x в y для всех пар (x,y) таких, что $c_f(x,y) > 0$. Любой путь из s в t в полученном ориентированном графе называется *дополняющим путем* потока f.

1. Докажите, что для любого потока f и разреза (S,T) выполнено $|f| = f(S,T)$.

2. **Теорема Форда-Фалкерсона.** Пусть в сети G с пропускной способностью c задан поток f. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

   1. Поток f — максимальный.
   2. В остаточной сети G_f нет дополняющего пути.
   3. Существует разрез (S,T) такой, что $f(S,T) = c(S,T)$.

3. Величина максимального потока равна пропускной способности минимального разреза.

4. Пусть пропускная способность каждого ребра — целое число. Докажите, что в сети есть максимальный целочисленный поток (т.е. поток через каждое ребро — целый).

5. Пусть (S_1,T_1) и (S_2,T_2) — минимальные разрезы в сети G. Докажите, что разрезы $(S_1 \cup S_2, T_1 \cap T_2)$ и $(S_1 \cap S_2, T_1 \cup T_2)$ также являются минимальными
(а) для целочисленной сети G; **(б)** для произвольной сети G.

Докажите следующие классические теоремы из теории графов с помощью теоремы Форда-Фалкерсона.

6. **Теорема Холла.** Пусть в двудольном графе $G = (L,R,E)$ для любого k и k-элементного подмножества $L_0 \subset L$ количество вершин из R, смежных хотя бы с одной из вершин множества L_0, не меньше k. Тогда в графе есть паросочетание, содержащее все вершины из L.

7. **Теорема Кёнига.** Пусть в двудольном графе G любое паросочетание имеет размер не более k. Тогда можно выбрать k вершин таких, что любое ребро графа имеет конец среди выбранных вершин.

8. **Теорема Менгера.** Даны граф G и две его вершины u и v.
(а) Пусть u и v остаются в одной компоненте связности при выкидывании любых $(n - 1)$ ребер. Тогда существуют n реберно непересекающихся путей из u в v.
(б) Пусть u и v остаются в одной компоненте связности при выкидывании любых $(n-1)$ вершин. Тогда существуют n вершинно непересекающихся путей из u в v (путей, у любых двух из которых общими вершинами являются только u и v).