

Я знаю, что ты знаешь, что я знаю

1. Петя и Вася загадали по натуральному числу и сказали их Коле. Коля написал на одном листе бумаги сумму загаданных чисел, а на другом их произведение. После этого он один из листов съел, а другой — на нём оказалось написано число 2022 — показал Пете и Васе. Увидев это число, Петя сказал, что не знает, какое число загадал Вася. Услышав это, Вася сказал, что не знает, какое число загадал Петя. Какое число загадал Вася?
2. Лев — очень мудрое животное, которое всегда действует рационально. На волшебный остров поселили n львов и одну козу. Львы могут питаться растущими на острове плодами, но коза для льва вкуснее. Однако остров волшебный, и съевший козу лев сам мгновенно превращается в козу. Ни один из львов не хочет быть съеденным (после того, как станет козой) другим львом, и другие львы об этом знают. При каких n коза будет съедена?
3. Двум гениям сообщили по натуральному числу и сказали, что эти числа отличаются на 1. После этого они по очереди задают друг другу один и тот же вопрос: "Знаешь ли ты моё число?". Докажите, что рано или поздно ответят "Да".
4. Император пригласил на праздник n волшебников, добрых и злых, при этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император — нет. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой говорит что угодно. На празднике император сначала выдаёт каждому волшебнику по бумажке с вопросом (требующим ответа «да» или «нет»), затем волшебники отвечают, и после всех ответов император одного изгоняет. Волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнаёт, добрый он был или злой. После этого император вновь выдаёт каждому из оставшихся волшебников по бумажке с вопросом, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (это возможно после любого из ответов, и после остановки можно никого не изгонять). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.
5. В городе живут n волшебников из предыдущей задачи ($n > 1$), добрых больше, чем злых. Можно задавать любым горожанам вопросы типа «кем является такой-то» (в частности, можно спросить человека, кем является он сам). Другие вопросы задавать нельзя. Можно ли узнать тип всех горожан за (а) $2n - 2$ вопроса; (б) $2n - 3$ вопроса; (в) за меньшее число вопросов?
6. На лбах у n мудрецов, сидящих по кругу, написали натуральные числа. Султан, увидев эти числа, выписал на доске m чисел и объявил, что сумма всех чисел на лбах мудрецов выписана на доске. Далее султан идёт по кругу и спрашивает: «Можешь ли ты, видя числа на доске и зная предыдущие ответы мудрецов, определить своё число?». Если в какой-то момент мудрей ответит «Да» и верно назовёт число, то всех отпустят. (а) Докажите, что если $m > n$, то султан может так написать числа на лбах и доске так, чтобы не отпустить мудрецов. (б) Докажите, что если $n \leq m$, то мудрецов заведомо отпустят.