Аффинная стереометрия

1. (*Теорема Менелая*) На рёбрах AB, BC, CD, DA пространственной неплоской ломаной $ABCD$ отмечены точки K, L, M, N соответственно. Докажите, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда выполнено соотношение
$$\frac{\overline{AK}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MD}} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{NA}} = 1.$$

2. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины рёбер SA, SB, SC, SD пирамиды $SABCD$ соответственно.
(а) Известно, что отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что $ABCD$ - прямоугольник.
(б) Известно, что пространственные четырёхугольники $ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD$, AB_1C_1D являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$– ромб.

3. Четыре сферы касаются друг друга внешним образом. Соединим точку касания двух из них с точкой касания двух оставшихся. Докажите, что три построенных (выбирая разные разбиения сфер на пары) отрезка пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что плоскость, проходящая через середины противоположных рёбер тетраэдра, делит его на две части равного объёма.

5. Пятигранник $ABCA_1B_1C_1$ имеет две треугольные грани ABC и $A_1B_1C_1$ и три грани — выпуклые четырёхугольники ABB_1A_1, BCC_1A_1, CAA_1C_1, причём его рёбра AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Обозначим точку пересечения плоскостей A_1BC, AB_1C, ABC_1 через P, и обозначим точку пересечения плоскостей AB_1C_1, A_1BC_1,A_1B_1C через P_1. Докажите, что $PP_1 \parallel AA_1$.

6. Пусть точки A_1, B_1, C_1, D_1 — соответственно середины рёбер SA, SB, SC, SD четырёхугольной пирамиды $SABCD$. Известно, что пространственные четырёхугольники $ABC_1D_1, A_1BCD_1, A_1B_1CD, AB_1C_1D$ являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

7. Тетраэдр $ABCD$ вписан в сферу с центром в точке O. Пусть ℓ_A — прямая, соединяющая точку пересечения медиан грани BCD с отражением точки A относительно центра O. Аналогично определены прямые ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D. **(а)** Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C, ℓ_D пересекаются в одной точке (назовём её X). **(б)** Докажите, что прямая, соединяющая точку X с серединой ребра AB, перпендикулярна прямой CD.

8. Назовём многогранник *кубоподобным*, если у него шесть четырёхугольных граней и восемь вершин, в каждой из которых сходится по три грани.

   Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубоподобного многогранника, пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке.