Усиление индукции

1. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n} - 2\,.$$

2. Определим числа K_n: $K_0 = 1$ и $K_{n+1} = 1 + \min(2K_{[n/2]}, 3K_{[n/3]})$. Докажите, что $K_n \geqslant n$.

3. Докажите, что если НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, то уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 1$$

имеет решение в целых числах.

4. Докажите неравенство:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) < \frac{5}{2}\,.$$

5. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2\,.$$

6. Назовем натуральное число *ровным,* если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел.

7. В дереве n вершин, занумерованных числами от 1 до n. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно так занумеровать числами от 1 до n, чтобы никакие два отрезка, соответствующие ребрам дерева, не пересекались.

8. Докажите неравенство $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{n}}}} < 3$.

9. В выпуклом n-угольнике $A_1A_2 \ldots A_n$ некоторые отрезки A_iA_j окрашены зеленым цветом так, что зеленые отрезки не пересекаются во внутренних точках. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно обозначить $B_1, B_2, \ldots B_n$ так, что при покраске в красный цвет всех отрезков B_i, B_j, для которых отрезки A_iA_j — зеленые, красные отрезки также не будут пересекаться во внутренних точках.