Комбинаторная теорема о нулях

Определение. Дан многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных. Одночлен $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$, входящий в f, называется *старшим*, если для любого другого одночлена $x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n}$, входящего в f, верно, что $e_i < d_i$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Обозначение. Для конечного множества $A \subset \mathbb{R}$ и $\alpha \in A$ обозначим число

$$D(A, \alpha) = \prod_{c \in A \setminus \{\alpha\}} (\alpha - c).$$

Теорема. Пусть $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$ является старшим одночленом многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных, а C – коэффициент при этом одночлене. Пусть также даны n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$, причём $|A_i| = d_i + 1$. Тогда коэффициент C может быть найден по формуле

$$C = \sum_{\alpha_1 \in A_1} \sum_{\alpha_2 \in A_2} \cdots \sum_{\alpha_n \in A_n} \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)}{D(A_1, \alpha_1) D(A_2, \alpha_2) \cdots D(A_n, \alpha_n)}.$$

Следствие 1. Дан многочлен $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ степени $\deg f \leqslant d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Предположим, что $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$, причём $|A_i| > d_i$ для всех i, и коэффициент при одночлене $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \cdots x_n^{d_n}$ в f не равен нулю. Тогда

$$\exists \alpha_i \in A_i : f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0.$$

Следствие 2. Дан многочлен $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ степени $\deg f < d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Предположим, что $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$, причём $|A_i| > d_i$ для всех i, и

$$\exists \alpha_i \in A_i : f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0.$$

Тогда

$$\exists \beta_i \in A_i : f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \neq 0 \quad \text{и} \quad \beta_j \neq \alpha_j \text{ для некоторого } j.$$

---

0. В каждой вершине выпуклого 100-угольника написано по два различных числа. Докажите, что можно вычеркнуть по одному числу в каждой вершине так, чтобы оставшиеся числа в каждых двух соседних вершинах были различными.

1. Дано натуральное число n. Рассмотрим множество

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$$

из $(n+1)^3 - 1$ точек в пространстве. Найдите наименьшее количество плоскостей, объединение которых покроет точки множества S, но не покроет точку $(0, 0, 0)$.

2. Даны простое число p и многочлены $P_1, P_2, \dots, P_m$ от n переменных с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$, причём $\deg P_1 + \deg P_2 + \ldots + \deg P_m < n$. Оказалось, что у многочленов $P_1, P_2, \dots, P_m$ есть общий корень $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. Докажите, что у них есть ещё один общий корень.

3. **(а)** **Теорема Коши-Дэвенпорта.** Даны непустые $A, B \subset \mathbb{F}_p$. Обозначим

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Докажите, что $|A + B| \geqslant \min(p, |A| + |B| - 1)$.

(б) Обозначим теперь

$$A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B, a \neq b\}.$$

Докажите, что если $A \neq B$, то $|A \oplus B| \geqslant \min(p, |A| + |B| - 2)$.

Определение. *Симметрической разностью* двух множеств называется множество, состоящее из объектов, входящих в ровно одно из этих множеств.

4. Пусть n — натуральное число. Вадим выбрал произвольное семейство из $2^n + 1$ различных множеств, каждое из которых содержит конечное число объектов и покрашено в один из двух цветов: красный или синий (оба цвета встречаются). Для каждой пары из синего и красного множеств Вадим рассмотрел их симметрическую разность. Докажите, что Вадим получит хотя бы 2^n различных множеств.

5. Даны m векторов $v_1, v_2, \dots, v_m \in (\mathbb{F}_p)^k$. При каком наименьшем m можно гарантированно найти несколько с суммой $(0, 0, \dots, 0)$?

Подсказка: воспользуйтесь многомерным обобщением задачи 1.

Определение. Дан граф $G = (V, E)$ и функция $f : V \to \mathbb{N}$. Граф G называется *f-списочно раскрашиваемым*, если для любого семейства подмножеств натуральных чисел $(A_v)_{v \in V}$, таких что $|A_v| = f(v)$, можно выбрать $c_v \in A_v$ так, что $c_u \neq c_v$ для $(u, v) \in E$.

6. Дан двудольный ориентированный граф $G = (V, E)$ и функция $f : V \to \mathbb{N}$. Выяснилось, что для любой вершины $v \in V$ исходящая степень $\operatorname{outdeg} v \leqslant f(v) - 1$. Докажите, что граф G является f-списочно раскрашиваемым.

7. В графе G степень каждой вершины не больше $2p - 1$, но средняя степень всех вершин строго больше $2p - 2$. Докажите, что G содержит p-регулярный подграф.