

Неравенства

- По кругу расставлено не менее четырёх неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $1/4$.
- Положительные x_1, x_2, \dots, x_n таковы, что

$$\frac{1}{x_1 + 2023} + \frac{1}{x_2 + 2023} + \dots + \frac{1}{x_n + 2023} = \frac{1}{2023}.$$

Докажите, что $\frac{\sqrt[n-1]{x_1 x_2 \dots x_n}}{n-1} \geq 2023$.

- Известно, что квадратный трёхчлен

$$(b + c)x^2 + (a + c)x + (a + b)$$

не имеет корней. Докажите, что $4ac - b^2 \leq 3a(a + b + c)$.

- Даны натуральные числа $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \dots + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_n]} < 2.$$

- Докажите, что для произвольных $a, b, c > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{a^9}{bc} + \frac{b^9}{ac} + \frac{c^9}{ba} + \frac{2}{abc} \geq a^5 + b^5 + c^5 + 2.$$

- Докажите, что $|\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x \cdot \dots \cdot \sin 2^n x| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

- Даны положительные числа x_1, x_2, \dots, x_n и натуральное $k < n$. Докажите неравенство

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1}} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + \dots + x_{k+2}} + \dots + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_k} \geq \frac{n}{k^2}.$$