Стягивание графа

1. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого не делится на 3.

2. В городе N двустороннее движение. В течение двух лет в городе проходил ремонт всех дорог. Вследствие этого в первый год на некоторых дорогах было введено одностороннее движение. На следующий год на этих дорогах было восстановлено двустороннее движение, а на остальных дорогах введено одностороннее движение. Известно, что в каждый момент ремонта можно было проехать из любой точки города в любую другую. Докажите, что в N можно ввести одностороннее движение так, что из каждой точки города удастся проехать в любую другую точку.

3. В стране есть n городов. Некоторые пары из них соединены беспосадочными двусторонними авиалиниями. Оказалось, что для любого k $(2 \leqslant k \leqslant n)$ при любом выборе k городов, количество авиалиний между этими городами не будет превосходить $2k-2$. Докажите, что все авиалинии можно распределить между двумя авиакомпаниями так, что не будет замкнутого авиамаршрута, в котором все авиалинии принадлежат одной компании.

4. В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены дорогами. Известно, что из любого города можно добраться до любого другого. Докажите, что можно разбить города на несколько областей так, чтобы граф дорог внутри каждой области был деревом с более чем одной вершиной.

5. На острове рыцарей и лжецов есть 1001 поселок, соединенные n дорогами так, что от каждого города можно добраться до каждого. В каждом поселке жители только одного из типов. Жители каждого поселка сделали 2 утверждения:

1. Наш поселок соединен хотя бы с 3 другими поселками.
2. Наш поселок соединен хотя бы с 2 поселками лжецов.

Какое наименьшее количество поселков с лжецами может быть на острове? **(а)** Если $n > 1000$; **(б)** Если $n = 1000$?

6. В стране 100 городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём всего есть 200 дорог. Оказалось, что любой циклический маршрут имеет длину не менее пяти. Докажите, что существуют два непересекающихся циклических маршрута.

7. Дан граф на 100 вершинах. Известно, что при удалении любой вершины в полученном графе можно выделить 33 треугольника, не имеющих общих вершин. Какое наименьшее число ребер может быть в данном графе?