Геометрический разнобой

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N соответственно таким образом, что $MN \parallel AC$. Точки M' и N' симметричны точкам M и N относительно BC и AB соответственно. Прямые $M'A$ и BC в точке X, а прямые $N'C$ и AB пересекаются в точке Y. Докажите, что точки A, C, X, Y лежат на одной окружности.

2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках P и Q. На S_1 выбраны отдельные точки A_1 и B_1 (не P и не Q). Прямые A_1P и B_1P повторно пересекают S_2 в A_2 и B_2 соответственно, а прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке C. Докажите, что при изменении A_1 и B_1 центры описанных треугольников A_1A_2C лежат на фиксированной окружности.

3. Для точек A, B, C, D пространства выполнены равенства
$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90^\circ,$$
Докажите, что A, B, C, D лежат в одной плоскости.

4. Четырехугольник $ABCD$ ($AB \neq CD$) вписан в окружность. Четырехугольники $AKDL$ и $CMBN$ являются ромбами с равными сторонами. Докажите, что $KLMN$ вписан в окружность.

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка X так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABX и BXC равны. Докажите, что
$$BX^2 = S_{ABC} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\angle B}{2}\right)$$

6. Пусть E — проекция вершины C прямоугольника $ABCD$ на диагональ BD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям AEB и AED пересекаются на окружности AEC.

7. Пусть $ABCD$ — тетраэдр, I — центр его вписанной сферы, а прямая ID перпендикулярна AD. Найдите угол между плоскостями DIB и DIC.

8. Пусть I_a — центр вневписанной окружности треугольника ABC относительно A, а AI_a пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке T. Пусть X — точка на TI_a такая, что $XI_a^2 = XA \cdot XT$. Перпендикуляр от X к BC пересекает BC в A'. Аналогично определяются B' и C'. Докажите, что AA', BB' и CC' пересекатся в одной точке.