Лемма Шпернера

Определение. Триангуляцией многоугольника на плоскости называется разбиение многоугольника на треугольники, любые два из которых либо вообще не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону.

1. **(а)** На окружности отмечено несколько красных и несколько синих точек. Докажите, что число дуг разбиения с разноцветными концами чётно.
(б) На отрезке отметили несколько точек и каждую пометили целым числом от 1 до 4. Оказалось, что любые два соседних числа разной чётности, а концы покрашены в цвета 1 и 3 соответственно. Докажите, что в сумме количество пар $1-2$ и $3-4$ — нечётное число.

2. Каждую сторону треугольника поделили на n равных частей и через точки деления провели прямые, параллельные его сторонам. В результате получилась триангуляция треугольника. Каждую вершину триангуляции покрасили в один из двух цветов: красный или синий. Докажите, что число двуцветных ребер триангуляции четно.

3. Сферу триангулировали, вершины триангуляции произвольным образом раскрашены в три цвета. Докажите, что число треугольников триангуляции с разноцветными вершинами чётно.

4. **Лемма Шпернера.** Дана триангуляция треугольника ABC. Вершины A, B и C раскрашены в цвета 1, 2 и 3 соответственно. Вершины треугольников триангуляции на стороне AB раскрашены в цвета 1 и 2 (аналогично на AC — в 1 и 3, на BC — в 2 и 3). Вершины внутри раскрашены в произвольные цвета (1, 2 или 3). Докажите, что найдется треугольник триангуляции с разноцветными вершинами.

5. Дана триангуляция $3n$-угольника, в которой нет вершин треугольников на сторонах. Вершины $3n$ угольника покрашены циклически (1-2-3-1-2-3-…), а остальные — произвольно. Докажите, что найдётся хотя бы n треугольников триангуляции с разноцветными вершинами.

6. **Лемма Таккера.** Дана триангуляция правильного чётноугольника, каждая вершина триангуляции отмечена одним из чисел множества $\{1, -1, 2, -2\}$. Оказалось, что противоположные вершины исходного правильного чётноугольника отмечены противоположными числами, а на сторонах нет других вершин триангуляции. Докажите, что существуют две вершины с противоположными числами, соединённые ребром.

7. **Лемма Шашкина.** Пусть дана триангуляция центрально симметричного многоугольника, которая является центрально симметричной на его границе. Вершины пометили числами из множества $+1, -1, +2, -2, +3, -3$ так, что на противоположных вершинах пометки противоположны. Предположим, что у этой разметки нет рёбер, соединяющих вершины с противоположными пометками. Докажите, что тогда для любых a, b, c, где $|a| = 1, |b| = 2, |c| = 3$, общее число треугольников в триангуляции с метками (a,b,c) и $(-a,-b,-c)$ — нечетно.

Применение леммы Шпернера.

8. **(а)** Покрасьте вершины целочисленной решётки в 3 цвета так, чтобы все разноцветные треугольники имели нецелую площадь. **(б)** Квадрат со стороной $2n+1$ разрезан на треугольники, координаты всех вершин целочисленны. Докажите, что найдется треугольник с нецелой площадью.

9. **Теорема Брауэра.** Дан треугольник $\triangle$ (с границей и со внутренностью) и непрерывное отображение $f : \triangle \longrightarrow \triangle$. Используя лемму Шпернера, докажите, что отображение f обладает неподвижной точкой.