Теорема Волстенхолма

Во всех следующих задачах по умолчанию $p \geqslant 5$ является простым числом.

0. Имеет место сравнение

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

1. **(Теорема Волстенхолма)** Для натуральных $a < b$ имеет место сравнение

(а) $C_{2p}^{p} \equiv 2 \pmod{p^3}$;

(б) $C_{bp}^{ap} \equiv C_b^a \pmod{p^3}$.

2. Дано натуральное s. Докажите, что $C_{p^{s+1}}^{p} \equiv p^s \pmod{p^{2s+3}}$.

3. Докажите, что

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^p} \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

4. Даны натуральные числа k и m. Оказалось, что для любого простого делителя $p \mid m$ число k **не** делится на $p-1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{(m-1)^k} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Суммирование ведётся по слагаемым, знаменатели которых взаимно просты с m.

5. **(а)** Докажите, что

$$\sum_{0<i<j<k<p} ijk \equiv 0 \pmod{p}.$$

(б) Докажите, что следующие сравнения эквивалентны:

[label=()]$C_{2p-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^4}$; $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^3}$; $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

6. Пусть $p = 4k+3$ — простое число. Найдите, чему равно

$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2+1} \pmod{p}.$$

7. Докажите, что для натурального $n > 1$ число $C_{2^{n+1}}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}}$ делится на 2^{2n+2}.