Разноцветные рёбра

Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если никакие два ребра одного цвета не имеют общую вершину.

Минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить правильным образом рёбра графа G называется *хроматическим индексом* и обозначается $\chi'(G)$.

1. Назовем раскраску (не обязательно правильную) рёбер графа *яркой*, если между любыми двумя вершинами найдется путь, все рёбра в котором разного цвета. Какое наименьшее количество цветов может быть в яркой раскраске

(a) полного графа на n вершинах;

(b) полного двудольного графа с долями по n вершин;

(c) дерева на n вершинах?

2. Рёбра графа покрашены в два цвета так, что в любом пути из трёх различных рёбер (возможно, замкнутом) первое и последнее ребро окрашены в разные цвета. Докажите, что вершины графа можно правильным образом раскрасить в два цвета.

3. Пусть G — связный граф с четным числом вершин, и степень всех вершин четна. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине были представлены оба цвета.

4. Пусть G — связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине степени не менее двух были представлены оба цвета.

5. Рёбра связного графа покрашены в k цветов, причем из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. Злой гномик удалил $k-1$ ребро. Оказалось, что все удаленные ребра были разных цветов. Докажите, что граф остался связным.

6. Найдите хроматический индекс

(a) полного графа на $2n+1$ вершине;

(b) полного графа на $2n$ вершинах.

7. Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G)$ равняется наибольшей степени вершины графа G.