Разноцветные рёбра

Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если никакие два ребра одного цвета не имеют общую вершину.

Минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить правильным образом рёбра графа G называется *хроматическим индексом* и обозначается $\chi'(G)$.

1. Пусть G — связный граф с четным числом вершин, и степень всех вершин четна. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине были представлены оба цвета.

2. Пусть G — связный граф, отличный от цикла нечетной длины. Докажите, что ребра графа G можно покрасить в два цвета так, чтобы в каждой вершине степени не менее двух были представлены оба цвета.

3. Рёбра связного графа покрашены в k цветов, причем из каждой вершины выходит ровно по одному ребру каждого цвета. Злой гномик удалил $k-1$ ребро. Оказалось, что все удаленные ребра были разных цветов. Докажите, что граф остался связным.

4. Найдите хроматический индекс

(a) полного графа на $2n+1$ вершине;

(b) полного графа на $2n$ вершинах.

5. Пусть G — двудольный граф. Докажите, что $\chi'(G)$ равняется наибольшей степени вершины графа G.

6. Каждое ребро полного графа G ориентировали одним из двух способов, а потом раскрасили в один из двух цветов. Докажите, что найдется вершина v такая, что для любой вершины u существует одноцветный ориентированный путь из v в u.

7. Дан граф, степень каждой вершины которого равна 3. Известно, что число правильных раскрасок рёбер в 3 цвета не делится на 4. Докажите, что в графе есть гамильтонов цикл.